СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 32, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1991

УДК 513.83

А. А. ХУСАИНОВ

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НАКРЫТИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ

В данной работе доказывается, что для любого морфизма категории с выделенным множеством объектов и абелевой системы коэффициентов существует спектральная последовательность, превращающаяся в спектральную последовательность расслоения [1], как только обратимы морфизмы системы когомологий слоев. Более того, существует соответствующая гомотопическая эквивалентность, если коэффициенты лежат в категории полных симплициальных множеств.

Основная идея работы состоит в том, что понятие свободного действия группы на симплициальном множестве обобщается для случая диаграммы. Доказывается, что спектральная последовательность Андре [2], расслоения [3], копредела малых категорий [4] и соответствующие слабые эквивалентности гомотопических пределов диаграмм полных симплициальных множеств являются частными случаями спектральной последовательности и гомотопической эквивалентности накрытия.

В заключение строится спектральная последовательность непрерывного отображения для обобщенной теории когомологий.

1. Накрытия

В данном пункте вводится определение накрытия и доказывается, что полное вложение малой категории порождает каноническое накрытие для любого объекта большей категории. Ниже функтор будет называться также *диаграммой*, предел — *обратным*, а копредел — *прямым*.

Пусть π: $P\to T$ — функтор из малой категории P в категорию T. Напомним, что объектами комма-категории π/X являются пары (p, s), где p — объект из P, а s: $\pi(p)\to X\in T$ — морфизм в T. Морфизмы между (p, s), $(p', s')\in\pi/X$ задаются тройками $(s, s', a$: $p\to p')$, удовлетворяющими соотношению $s'\cdot\pi(a)=s$. Повсюду через $QX=Q_x$: $\pi/X\to T$ будем обозначать забывающий функтор, $QX(s, s', a)=a$. То же самое касается комма-категории X/π с объектами вида $(p, s$: $X\to\pi(p))$.

В случае, когда π: $P\to T$ — полное вложение, комма-категория π/X иногда обозначается через P/X.

1.1. Всякий функтор E из малой категории I в категорию множеств Ens порождает симплициальное множество $\coprod_* E$ по формуле, аналогичной [3, с. 271]

$$\coprod_n E=\coprod_{i_0\to i_1\to\ldots\to i_n} E(i_0),\quad i_m\in I.$$

Определение. Функтор E: $I\to\mathrm{Ens}$ называется *накрытием*, если каноническое отображение $\coprod_* E$ в дискретное симплициальное множество $\operatorname{colim} E$ есть слабая гомотопическая эквивалентность.

Пусть φ_i: $E(i)\to\operatorname{colim} E$ — канонические отображения копредела. Согласно определению гомотопического копредела как диагонали двой-

© 1991 Хусаинов А. А.

ного [5] симплициального множества, соответствующего диаграмме, следующие свойства диаграммы E равносильны:

(1) E — накрытие,

(2) $\operatorname{hocolim} E \approx \operatorname{colim} E$,

(3) $\bigsqcup_* \{\varphi_i^{-1}(e)\} \approx pt$, где pt — симплициальная точка,

(4) $\operatorname{hocolim} \{\varphi_i^{-1}(e)\} \approx pt$, для каждого $e \in \operatorname{colim} E$.

Здесь и ниже символом $\approx$ обозначается слабая гомотопическая эквивалентность между симплициальными множествами.

1.2. Всякий функтор E из псевдофильтрующейся [6, с. 212] малой категории I в Ens является накрытием. Действительно, геометрическая реализация hocolim слабо эквивалентна гомотопическому прямому пределу $h = \operatorname{colim}$ [7], всякая петля в котором, состоящая из 1-мерных клеток, может быть стянута к некоторой вершине по свойству направленности компонент связности диаграммы, а группы гомологий $H_n(\operatorname{hocolim} E)$ изоморфны производным функтора копредела $\operatorname{colim}_n \{LE_i\}$ диаграммы свободных абелевых групп, порожденных множествами E_i. Таким образом, $\operatorname{hocolim} E$ односвязен, имеет тривиальные группы гомологий и по теореме Уайтхеда слабо стягиваемые компоненты связности.

1.3. Предложение. *Для любого объекта c малой категории C функтор $h^c = C(c, -): C \to \mathrm{Ens}$ есть накрытие.*

Доказательство. Симплициальное множество $\bigsqcup_* h^c$ изоморфно нерву категории c/C, так как $\bigsqcup_n h^c \cong \bigsqcup_{c \to c_0 \to \ldots c_n} pt$.

1.4. Следствие. *Если C обладает конечными пределами, то всякий точный слева функтор из C в Ens — накрытие.*

1.5. Определение. Пусть π — функтор из малой категории P в категорию T, I — малая категория. Функтор $R: I \to T$ называется *накрытием относительно* π или *π-накрытием*, если диаграмма множеств $T(\pi(p), R(-))$ над I есть накрытие для каждого $p \in P$.

Например, всякое полное вложение $\pi: P \to T$ будет π-накрытием, т. е. накрытием относительно себя, по предложению 1.3. В частности, тождественный функтор Id_C малой категории C — это Id_C-накрытие.

Пусть $N: \mathrm{Cat} \to \Delta^0 \mathrm{Ens}$ — функтор, ставящий в соответствие малой категории ее нерв [3, с. 82]. В дальнейшем нам понадобится следующее усиление соотношения $\operatorname{colim} \{N(C/c)\} \cong NC$ [5, с. 292].

1.6. Предложение. *Пусть $\Delta: \Delta \to \Delta^0 \mathrm{Ens}$ — вложение подкатегории стандартных симплексов в категорию симплициальных множеств. Тогда для любой малой категории C диаграмма симплициальных множеств $\{N(C/c)\}_{c \in C}$ является Δ-накрытием.*

Доказательство. Пусть $N_n(C/c)$ — множество симплексов размерности n, $N_n(C/c) = \Delta^0 \mathrm{Ens}(\Delta[n], \; N(C/c))$, $Q_{c,n}: N_n(C/c) \to N_n C$ — отображения, равные $N_n(Q_c)$, где $Q_c(c' \to c) = c'$. Тогда $Q_{c,n}^{-1}(c_0 \to \ldots \to c_n)$ равно $C(c_n, c)$, откуда

$$\operatorname{hocolim} \{Q_{c,n}^{-1}(c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n)\} \cong \operatorname{hocolim} h^{c_n},$$

$$\operatorname{colim} \{Q_{c,n}^{-1}(c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n)\} \cong \operatorname{colim} h^{c_n} \cong \{1_{c_n}\}.$$

Применяя предложение 1.3, получаем, что $\{N_n(C/c)\}$ — накрытие. Заметим также, что $\operatorname{colim} \{N_n(C/c)\} \cong \bigsqcup_{c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n} \operatorname{colim} h^{c_n} \cong N_n C$.

1.7. Теорема. *Если π — полное вложение малой категории P в категорию T, то для любого объекта $X \in T$ композиция $QX: \pi/X \to P$ на $\pi: P \to T$ является π-накрытием.*

Доказательство. Так как π — полное вложение, то будем отождествлять объекты и морфизмы из P с соответствующими объектами и морфизмами в T. Надо доказать, что морфизм

$$\operatorname{hocolim} \{T(p, q_a)\}_{a \in \pi/X} \to \operatorname{colim} \{T(p, q_a)\}_{a \in \pi/X}$$

есть слабая эквивалентность для $p \in P$, где a: $\pi(q_a) \to X$ пробегает объекты категории π/X. Пусть $x \in P(p, q_a)$ при некотором $a \in \pi/X$, тогда морфизм $P(p, x)$: $P(p, p) \to P(p, q_a)$ переводит элемент $1_p \in P(p, p)$ в x и композиция $a \cdot x$: $p \to q_a \to X$ принадлежит $T(\pi(p), X)$.

Если морфизм $(q_a, a) \to (q_b, b)$ переводит $x \in T(p, q_a)$ в $y \in T(p, q_b)$, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & q_a \arrow[d, "a"] \arrow[dl] \\ q_b \arrow[r, "b"'] & X \end{tikzcd},$$

откуда $a \cdot x = b \cdot y$, т. е. x и y — представители одного и того же элемента из $T(\pi(p), X)$. Поэтому $\operatorname{colim}\{P(p, q_a)\}$ изоморфен $T(\pi(p), X)$. Рассмотрим теперь любой элемент $z \in T(\pi(p), X)$ и его прообразы $\varphi_a^{-1}(z)$, где φ_a: $P(p, q_a) \to T(\pi(p), X)$ — отображения копредела. Любой такой прообраз $x \in \varphi_a^{-1}(z) \subseteq P(p, q_a)$ равен z, $a \cdot x = z$, откуда $\varphi_a^{-1}(z)$ — множество морфизмов из z в a в категории π/X. Следовательно, диаграмма $\{\varphi_a^{-1}(z)\}_{a \in \pi/X}$ это не что иное, как функтор вида h^z: $\pi/X \to \mathrm{Ens}$, и по предложению 1.3 $\operatorname{hocolim} h^z$, а вместе с ним и $\operatorname{hocolim}\{\varphi_a^{-1}(z)\}$ — стягиваемое симплициальное множество, что и требовалось доказать.

2. Гомотопическая эквивалентность накрытия

В данном пункте доказывается гомотопический аналог спектральной последовательности [4, теорема 2.1]. Повсюду π — функтор из малой категории P в категорию T. Напомним, что гомотопический предел holim определяется как композиция функторов Tot: $\Delta S \to S$ и Π^*: $\mathrm{Cat}/S \to S$ (см. [5]), где S — категория полных симплициальных множеств, ΔS — категория косимплициальных объектов S, Cat/S — категория диаграмм в S, в которой морфизмами между диаграммами F: $C \to S$, G: $D \to S$ служат коммутативные треугольники со сторонами F, G, f: $C \to D$. Таким образом, holim есть функтор из Cat/S в S.

2.1. Гомотопический предел функтора F: $\pi/X \to S$ можно свести к гомотопическому пределу диаграммы $\{\Pi_{a \in T(\pi(p), X)} F(a)\}_{p \in P}$, для этого достаточно применить функтор Tot к очевидному изоморфизму косимплициальных объектов в S:

$$\Pi^*\{\Pi_{a \in T(\pi(p), X)} F(a)\} \cong \Pi^* F.$$

Таким образом,

$$\operatorname{holim}_P\{\Pi_{a \in T(\pi(p), X)} F(a)\}_{p \in P} \cong \operatorname{holim} F.$$

2.2. Если заданы диаграмма множеств $\{E_i\}$ с копределом $E = \operatorname{colim}\{E_i\}$ и каноническими отображениями φ_i: $E_i \to E$ и семейство $\{G(e)\}_{e \in E}$ в S, то свойство стягиваемости hocolim от $\{\varphi_i^{-1}(e)\}_{i \in I}$ влечет слабую эквивалентность $\operatorname{holim}_i\{\hom(\varphi_i^{-1}(e), G(e))\}$ и $G(e)$, поэтому, применяя произведение по всем $e \in E$, приходим к соотношению

$$\operatorname{holim}_{I^0}\{\Pi_{e_i \in E_i} G\varphi_i(e_i)\} \approx \Pi_{e \in E} G(e).$$

Повсюду ниже функтор h_*: $P \to P^0\,\mathrm{Ens}$ — вложение Йонеды.

2.3. Лемма. *Функтор* $h_*/-$: $P^0\,\mathrm{Ens} \to \mathrm{Cat}$ *перестановочен с прямыми пределами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 1.6 $\operatorname{colim}\{C/c\} \cong C$, в частности, это верно для категории $C = h_*/X$, $X \in P^0\,\mathrm{Ens}$, откуда $h_*/X \cong \operatorname{colim}\{(h_*/X)/s\}_{s \in P/X}$. Так как $(h_*/X)/s \cong P/p$ для любого s: $h_p \to X$, то $h_*/X \cong \operatorname{colim}\{P/q_s\}$, где q_s — начало s в очевидном смысле. Таким образом, функтор $h_*/-$ в Cat есть расширение функтора $P/(-)$: $P \to \mathrm{Cat}$ по формуле [3, с. 69] и, значит, перестановочен с прямыми пределами [3, предложение 2.1.3].

2.4. Теорема. *Пусть $\{X^i\}_{i\in I}$ — накрытие относительно $\pi: P \to T$, тогда для любого функтора G из $\operatorname{colim}\{\pi/X^i\}$ в S имеет место слабая эквивалентность*

$$\operatorname{holim}_{I^0}\{\operatorname{holim} Gl_i\} \approx \operatorname{holim} G,$$

где $\{l_i: \pi/X^i \to \operatorname{colim}\{\pi/X^i\}\}$ — канонические морфизмы копредела.

Доказательство. Пусть $N: T \to P^0\,\mathrm{Ens}$ — функтор такой, что $NX(-) = T(\pi(-), X)$. Тогда $P/NX \cong \pi/X$ для любого $X \in T$. По лемме 2.3 имеет место изоморфизм $\operatorname{colim}\{\pi/X^i\} \cong P/\operatorname{colim}\{NX^i\}$, поэтому можно считать, что функтор G задан на $P/\operatorname{colim}\{NX^i\}$, а функторы l_i действуют из P/NX^i в $P/\operatorname{colim}\{NX^i\}$. Рассмотрим функтор двух аргументов (i, p) из $I^0 \times P$ в S: $\Pi(i, p) = \{\coprod_{x \in T(\pi(p), X^i)} Gl_i(x)\}$ — и воспользуемся эквивалентностью $\operatorname{holim}_i \operatorname{holim}_p$ и $\operatorname{holim}_p \operatorname{holim}_i$ по отношению к этому функтору. Как видно из п. 2.2,

$$\operatorname{holim}_{I^0}\{\Pi(i, p)\} \approx \coprod_{x \in \operatorname{colim}\{T(\pi(p), X^i)\}} G(x).$$

Применяя соотношение из п. 2.1, приходим к эквивалентности

$$\operatorname{holim}_p \operatorname{holim}_i\{\Pi(i, p)\} \approx \operatorname{holim}_{P/\operatorname{colim}\{NX^i\}} G.$$

В силу того же соотношения из п. 2.1 $\operatorname{holim}_p\{\Pi(i, p)\} \approx \operatorname{holim} Gl_i$, откуда $\operatorname{holim}_i \operatorname{holim}_p\{\Pi(i, p)\} \approx \operatorname{holim}_i\{\operatorname{holim} Gl_i\}$, и перестановочность приводит к необходимому результату.

3. Обратный образ накрытия

В данном пункте доказываются основные теоремы.

3.1. Теорема. *Пусть π — полное вложение малой категории P в T, $\varphi: X \to Y$ — морфизм T. Если для любого морфизма $s: \pi(p) \to Y$ существует обратный образ $\varphi^*(s)$ в T, т. е. расслоенное произведение s на φ, то диаграмма $\varphi^*: \pi/Y \to T$ является π-накрытием.*

Доказательство. Пусть $\{Y^i\}$ — π-накрытие из I в T, $\{g_i: Y^i \to Y\}$ — конус над ним. $T(\pi(p), -)$ перестановочен с пределами, поэтому диаграмма $\{\varphi^*(g_i)\}$ есть π-накрытие, так как декартовы квадраты

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*(g_i) & \to & Y^i \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_i} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

переходят в декартовы квадраты

$$\begin{array}{ccc} T(\pi(p), \varphi^*(g_i)) & \to & T(\pi(p), Y^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\pi(p), X) & \longrightarrow & T(\pi(p), Y) \end{array}.$$

По теореме 1.7 функтор $\pi/Y \to T$, переводящий $s: \pi(p) \to Y$ в $\pi(p)$, является π-накрытием, поэтому диаграмма φ^* — также π-накрытие, состоящее из обратных образов.

3.2. Теорема. *Пусть $\varphi: X \to Y$ — морфизм категории T, π — полное вложение малой категории P в T и для всех морфизмов вида $s: \pi(p) \to Y$ существуют обратные образы $\varphi^*(s)$ в T. Тогда для любой диаграммы F из π/X в S имеет место слабая эквивалентность*

$$\operatorname{holim}_{(\pi/Y^0)}\{\operatorname{holim} Fl_s\} \approx \operatorname{holim}_{\pi/X} F,$$

где $l_s: \pi/\varphi^*(s) \to \pi/X$ сопоставляет морфизму $\pi(p) \to \varphi^*(s)$ его композицию с морфизмом $\varphi^*(s) \to X$.

Доказательство. По теореме 3.1 $\{\varphi^*(s)\}_{s\in\pi/Y}$ — π-накрытие. Поэтому, подставляя $I = \pi/Y$ и $l_s: \pi/\varphi^*(s) \to \pi/X$ в теорему 3.2, получим необходимое утверждение, если предварительно убедимся в справедливости соотношения $\pi/X \cong \operatorname{colim}\{\pi/\varphi^*(s)\}_{s\in\pi/Y}$. Так как $\pi/X \cong P/NX$, где $NX(p) = T(\pi(p),\ X)$, $NX \in P^0\,\mathrm{Ens}$, то из леммы 2.3 следует, что $\operatorname{colim}\{\pi/\varphi^*(s)\} \cong h_*/\operatorname{colim}\{N\varphi^*(s)\}$, но $\operatorname{colim}\{N\varphi^*(s)\}_{P/NY} \cong NX$, поскольку $N\varphi^*(s)$ включается в декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} N\varphi^*(s) & \to & h_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ NX & \longrightarrow & NY \end{array}$$

и, значит, $P/NX \cong \operatorname{colim}\{P/N\varphi^*(s)\}$. Применяя к этому соотношению изоморфизм $P/NX \cong \pi/X$, приходим к изоморфизму $\pi/X \cong \operatorname{colim}\{\pi/\varphi^*(s)\}_{s\in\pi/Y}$, завершающему доказательство теоремы.

3.3. Докажем гомотопический аналог спектральной последовательности Андре [8, п. 9.7].

Предложение. *Для всякого функтора $f\colon C \to D$ между малыми категориями имеет место изоморфизм* $\operatorname{colim}_{D^0}\{d/f\}_{d\in D} \cong C$ *и диаграмма* $\{d/f\}$ *над* D^0 *является накрытием относительно вложения* $\Delta\colon \Delta \to \mathrm{Cat}$.

Доказательство. Слои $f^0/d \cong (d/f)^0$ функтора $f_0\colon C^0 \to D^0$ образуют Δ-накрытие как обратные образы морфизмов $s\colon D^0/d \to D^0$, по той же причине $\operatorname{colim}_{D^0}\{d/f\} \cong C$, так как $\operatorname{colim}_{D^0}\{d/D\} \cong D$.

Следствие. *Пусть $f\colon C \to D$ — функтор между малыми категориями и $F\colon D \to S$ — диаграмма полных симплициальных множеств. Тогда* $\operatorname{holim}_D\{\operatorname{holim} FQ_d\} \approx \operatorname{holim}_C F$.

Доказательство. По предложению 3.3 и теореме 2.4 существует слабая эквивалентность $\operatorname{holim}_D\{\operatorname{holim} F\circ\partial\circ(\Delta/Q_d)\} \approx \operatorname{holim} F\circ\partial$, где $\circ$ — символ композиции, а функторы, участвующие в формуле, суть стороны коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} \Delta/(d/f) & \to & \Delta/C \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & Q_d & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ d/f & \longrightarrow & C \end{array}$$

при $d\in D$, где $\partial(x_0 \to \ldots \to x_n) = x_n$. Слои вертикальных морфизмов стягиваемы, откуда $\operatorname{holim} F\circ\partial \approx \operatorname{holim} F$ [5]. Подставляя эту эквивалентность, приходим к необходимому соотношению.

3.4. Докажем гомотопический аналог спектральной последовательности расслоения.

Так как тождественный функтор $Id_C\colon C \to C$ есть Id_C-накрытие, то $\operatorname{holim}_{C}\{\operatorname{holim} FQ_c\} \approx \operatorname{holim}_C F$ для любого $F\colon C \to S$. Положим по определению $F^*(-) = \operatorname{holim}_{C/(-)} FQ_{(-)}$.

Лемма. *Если морфизмы диаграммы F являются слабыми эквивалентностями, то $F^*(c) \approx F(c)$ для каждого $c \in C$.*

Доказательство. Категория C/c обладает финальным объектом $1_c\colon c \to c$, поэтому существует естественное преобразование из FQ_c в функтор, принимающий постоянное значение $F(c)$. Все морфизмы этого естественного преобразования — слабые эквивалентности, поэтому морфизм $\operatorname{holim} FQ_c \to F(c)$ — слабая эквивалентность.

Следствие. *В условиях теоремы 3.2 существует слабая эквивалентность* $\operatorname{holim}_{\pi/Y}\operatorname{holim} Fl^*_{(-)} \approx \operatorname{holim}_{\pi/X} F$, *и если морфизмы диаграммы* $\operatorname{holim} Fl_{(-)}$ *являются слабыми эквивалентностями, то* $\operatorname{holim} Fl_s \approx \approx \operatorname{holim} Fl^*_s$ *при всех* $s \in \pi/Y$.

4. Коэффициенты в абелевой категории

Выше было доказано, что любой морфизм в категории с выделенным множеством объектов порождает накрытие, состоящее из слоев. Поэтому в случае абелевых коэффициентов применима теория, развитая в [4].

4.1. Теорема. *Пусть* $\varphi\colon X\to Y$ — *морфизм* T, π — *полное вложение малой категории* P *в* T *и для всех* $p\in P$, $s\colon \pi(p)\to Y\in T$ *существуют обратные образы* $\varphi^*(s)\in T$. *Тогда для любой диаграммы* G *из* π/X *в абелеву категорию с точными произведениями существует спектральная последовательность первой четверти*

$$\lim\nolimits^i_{(\pi/Y)^0}\{\lim\nolimits^j_{\pi/\varphi^*(s)} Gl_s\}\Rightarrow \lim\nolimits^{i+j}_{\pi/X} G,$$

где $l_s(\pi(p)\to\varphi^*(s))$ — *композиция* $\pi(p)\to\varphi^*(s)\to X$.

Доказательство. Как и выше, функтор $N\colon T\to P^0\,\mathrm{Ens}$ задан формулой $NX(-)=T(\pi(-),X)$, функтор $L\colon \mathrm{Ens}\to Ab$ сопоставляет множеству свободную абелеву группу, порожденную этим множеством. Было доказано, что $\{\varphi^*(s)\}_{s\in\pi/Y}$ есть π-накрытие, откуда $\mathrm{colim}_n\{LN\varphi^*(s)\}=0$ при $n>0$. Спектральная последовательность [4, теорема 2.1] сходится к производным функтора предела по категории $\mathrm{colim}_{\pi/Y}\{\pi/\varphi^*(s)\}$, изоморфной π/X, как было замечено при доказательстве теоремы 2.4.

4.2. Рассмотрим теперь случай, когда имеет смысл определение локальной системы когомологий слоев. Предположим, что морфизмы диаграммы

$$K^j(\varphi, G)=\{\lim\nolimits^j_{\pi/\varphi^*(s)} Gl_s\}_{s\in\pi/Y}$$

над $(\pi/Y)^0$ обратимы. Пусть $H^j(\varphi,G)=K^j(\varphi,G)^{-1}$ получена из $K^j(\varphi,G)$ обращением морфизмов. Если система коэффициентов G обратима, то

$$\lim\nolimits^j G^{-1}Q_s\cong \lim\nolimits^j G^{-1}l^0_s,\qquad s\in\pi/Y,$$

где $Q_s\colon s/(\pi/\varphi)^0\to(\pi/X)^0$ — правый слой функтора $(\pi/\varphi)^0\colon(\pi/X)^0\to(\pi/Y)^0$. Такое определение согласуется с определением локальной системы когомологий слоев [3, с. 282], поскольку $\lim^j G^{-1}l^0_s\cong\lim^j Gl$ [3, с. 280]. Пусть $H^j(X,G)=\lim^j_{\pi/X}G$.

Теорема. *Если морфизмы диаграммы* $\{\lim^j Gl_s\}$ *над* $(\pi/Y)^0$ *обратимы и выполнены условия теоремы* 4.1, *то существует спектральная последовательность первой четверти* $H^i(Y,H^j(\varphi,G))\Rightarrow H^{i+j}(X,G)$.

Доказательство. Так как $H^j(\varphi,G)$ является обращением $K^j(\varphi,G)$, то это следует из теоремы 4.1 и утверждения из [3, с. 280].

4.3. Если $\varphi\colon X\to Y$ — расслоение в категории симплициальных множеств, то диаграмма $\{\lim^j G^{-1}Q_s\}_{s\in\Delta/Y}$ обратима, как доказано в [3]. В этом случае $\lim^j G^{-1}Q_s\cong\lim^j Gl_s$, и получаем спектральную последовательность расслоения.

4.4. Приведем пример, когда способ [3] уже не работает. Пусть T — категория с расслоенными произведениями и P — малая подкатегория, замкнутая относительно расслоенных произведений. Рассмотрим морфизм $\varphi\colon X\to Y$. Пусть $(p',s')\to(p,s)$ — морфизм в π/Y, тогда всякий слой функтора $\pi/\varphi^*(s')\to\pi/\varphi^*(s)$ над $a\colon\pi(q)\to\varphi^*(s)$ является пределом диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi^*(s') & \to & \pi(p') \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi(q) & \to & \varphi^*(s) & \to & \pi(p) \end{array}.$$

Предел равен $\pi(q')$ при некотором $q'\in P$ по свойству замкнутости P относительно расслоенных произведений, поэтому слой изоморфен P/q' и стягиваем. Из работы [9] следует, что морфизмы $\lim^j Gl_s\to\lim^j Gl_{s'}$ обратимы, и, значит, спектральная последовательность теоремы 4.2 существует при любом G.

5. Обобщенные когомологии

На основе полученных результатов удается вывести спектральную последовательность непрерывного отображения для экстраординарных теорий когомологий.

5.1. Теорема. *Пусть или P — полная малая подкатегория категории компактно-порожденных хаусдорфовых пространств, состоящая из стягиваемых пространств, замкнутая относительно умножения на отрезок, т. е. если $p \in P$, то $p \times I \in P$, или P — полная подкатегория стандартных симплексов категории симплициальных множеств. Тогда для произвольных аддитивной теории когомологий k^* (с аксиомой слабой гомотопической эквивалентности) и морфизма $\varphi\colon X \to Y$ существует спектральная последовательность*

$$\lim\nolimits^i_{(P/Y)^0} \{k^j(\varphi^*(s))\} \text{ связанная с } k^{i+j}(X).$$

Доказательство. Применение теоремы 3.2 к постоянной системе коэффициентов или двойственные соображения в доказательстве теоремы 2.4 для диаграммы одноточечных пространств приводят к слабой гомотопической эквивалентности между $\mathrm{hocolim}_{\pi/Y}\{N(\pi/\varphi^*(s))\}$ и $N(\pi/X)$, где NC — нерв категории C. Поэтому существует спектральная последовательность [5, 7] $\lim^i_{(\pi/Y)^0}\{k^j(N(\pi/\varphi^*(s)))\} \Rightarrow k^{i+j}(N(\pi/X))$. В первом случае теоремы имеет место слабая эквивалентность между классифицирующим пространством категории P/X и пространством X [10], во втором — между $N(P/X)$ и X [11], для любого объекта X из соответствующей категории.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серр Ж. П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств // Расслоенные пространства и их приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. С. 9—114.
2. *André M.* Limites et fibres // C. r. Acad. sci. Sér. A. 1965. T. 260. P. 756—759.
3. *Габриель П., Цисман М.* Категория частных и теория гомотопий. М.: Мир, 1971.
4. *Хусаинов А. А.* Когомологии малых категорий с коэффициентами в абелевой категории с точными произведениями // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 210—215.
5. *Bousfield A. K., Kan D. M.* Homotopy limits, completions and localizations. Berlin etc.: Springer, 1972. (Lecture notes in math., 304).
6. *MacLane S.* Categories for the working mathematician. Berlin etc.: Springer, 1971.
7. *Vogt R. M.* Homotopy limits and colimits // Math. Z. 1973. Bd 134, N 1. S. 11—52.
8. *Dwyer W. G., Kan D. M.* A classifications theorem for diagrams of simplicial sets // Topology. 1984. V. 23, N 2. P. 139—155.
9. *Oberst U.* Homology of categories and exactness of direct limits // Math. Z. 1968. Bd 107. S. 89—115.
10. *Fiedorowicz Z.* Classifying spaces of topological monoids and categories // Amer. J. Math. 1984. V. 106. N 2. P. 301—350.
11. *Latch D. M.* The uniqueness of homology for the category of small categories // J. Pure and Appl. Algebra. 1977. V. 9. P. 221—237.

г. Новосибирск

Статья поступила 1 августа 1989 г.