УДК 515.14, 515.142.5, 512.664

Неабелевы гомологии и гомотопический копредел классифицирующих пространств для диаграммы групп [1]

А. А. Хусаинов

Аннотация

В статье рассмотрены неабелевы гомологии диаграммы групп введенные как гомотопические группы симплициальной замены. Доказано, что неабелевы гомологии диаграммы групп изоморфны гомотопическим группам гомотопического копредела диаграммы классифицирующих пространств, со сдвигом размерности на 1. В качестве приложения разработан метод нахождения ненулевой гомотопической группы наименьшей размерности для гомотопического копредела классифицирующих пространств. Для диаграммы групп над свободной категорией, имеющей нулевой копредел, получен критерий изоморфизма первых групп неабелевых и абелевых гомологий. Установлено, что неабелевы гомологии изоморфны котроечным левым производным функтора копредела определенном на категории диаграмм групп.

2000 Mathematics Subject Classification 55U10, 18C15, 18G10, 55P10, 55R35

Ключевые слова: гомотопические группы, симплициальная группа, диаграммы групп, котроечные гомологии, левые производные функторы, гомологии малых категорий, симплициальная замена, классифицирующие пространства, гомотопический копредел.

Содержание

[1]Перевод статьи: Husainov A.A. *Non-Abelian homology and homotopy colimit of classifying spaces for a diagram of groups*, Preprint, New York: Cornell University, arXiv:2303.10822v2 [math.AT], 2023. 32 p. https://arxiv.org/abs/2303.10822

1 Введение

В работе введены неабелевы гомологии $\operatorname{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G}$ для произвольной диаграммы групп $\mathcal{G}$ над малой категорией $\mathscr{C}$ (определение 4.1) с помощью симплициальной замены диграммы групп в смысле Бусфилда и Кана [3, XII.5.4]. Показано, что эти гомологии можно интерпретировать как гомотопические группы гомотопического копредела диаграммы классифицирующих пространств групп $\mathcal{G}$ со сдвигом размерности на 1 (теорема 5.2). Доказано, что эти гомологии изоморфны котроечным производным функтора копредела для диаграмм групп (теорема 6.4).

В гомотопической топологии, для исследования и вычисления гомотопических групп появилось много хороших методов и моделей [6]. Тем не менее, остается необходимость вычисления гомологий, и это требует развития гомологических методов. Данная работа посвящена теории неабелевых гомологий диаграмм групп, развивающей классическую теорию гомологий малых категорий. Теория неабелевых гомологий диаграмм нацелена на решение задач теории гомотопий.

Гомологии малых категорий с коэффициентами в диаграммах абелевых групп, коротко абелевы гомологии диаграмм, можно определить аналогично, с помощью симплициальной замены. Тем не менее, значения неабелевых и абелевых гомологий диаграмм отличаются очень сильно. Например, для категории V, состоящей из трех объектов и двух морфизмов

$$b \leftarrow a \rightarrow c,$$

кроме тождественных, абелевы гомологии любой диаграммы над V равны 0 в размерностях $n \geqslant 2$. Посмотрим, чему равны неабелевы гомологии. В нашей работе доказана следующая формула (теорема 5.2):

$$\operatorname{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G} \cong \pi_{n+1}(\operatorname{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G}), \tag{1}$$

где $\operatorname{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G}$ - гомотопический копредел диаграммы в категории пунктированных симплициальных множеств, состоящей из классифицирующих пространств (нервов) групп диаграммы $\mathcal{G}$. Из этой формулы следует, что n-е неабелевы гомологии диаграммы групп $0 \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ изоморфны гомотопическим группам двумерной сферы $\pi_{n+1}(S^2)$. В работе [21] установлено, что n-е гомотопические группы двумерной сферы не равны 0 для всех $n \geqslant 2$. Отсюда вытекает, что n-е неабелевы гомологии диаграммы $0 \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ не равны ее абелевым гомологиям для каждого $n \geqslant 1$.

Формула (1) показывает также, что неабелевы гомологии диаграммы $0 \leftarrow G \rightarrow 0$ изоморфны гомотопическим группам надстройки над классифицирующим пространством группы G, которые в ряде случаев были вычислены в работах [7], [25]. В работе [30] разработано программное обеспечение для расчета гомотопических групп таких пространств. Это указывает на возможность вычисления неабелевых гомологий диаграмм групп, в некоторых случаях.

Надежду на перспективность вселяет также полученное нами из формулы (1) утверждение о том, что для симплициальных групп, рассматриваемых как диаграммы групп, неабелевы гомологии изоморфны гомотопическам группам (Следствие 5.3). Из формулы (1) получаем также критерий односвязности гомотопического копредела диаграммы классифицирующих пространств групп (Следствие 5.4). По формуле (1) задача вычисления неабелевых гомологий диаграммы групп

$$\mathcal{G}(b) \leftarrow \mathcal{G}(a) \rightarrow \mathcal{G}(c) \tag{2}$$

тесно связана с неоторыми проблемами описания гомотопических групп гомотопического пушаута, например [5, Problem 2.2]. Заметим также, что формулы для гомотопических групп гомотопического копредела диаграммы классифицирующих пространств фактор-групп $G/N_{i_1} \cdots N_{i_k}$ над частично упорядоченным по включению множеством собственных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, доказанные в работе Эллиса и Михайлова [12], могут быть рассмотрены как формулы для неабелевых гомологий в размерностях n и $n-1$.

В нашей работе, для диаграммы групп $\mathcal{G}$ над свободной категорией, имеющей нулевой копредел, получен критерий изоморфизма первой группы неабелевой гомологии этой диаграммы и первой группы абелевой гомологии ее абелианизации (предложение 5.5).

Мы ввели косвязность $\operatorname{cocon} \mathcal{G}$ диаграммы групп $\mathcal{G}$ как наименьшее $n \geqslant 0$, для которого группа $\operatorname{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G}$ нетривиальна. Пример 5.7 демонстрирует метод нахождения косвязности $n = \operatorname{cocon} \mathcal{G}$ и вычисления значения группы $\operatorname{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G}$. Число $\operatorname{cocon} \mathcal{G}$ равно наибольшему n при котором пространство $\operatorname{hocolim}^{\mathscr{C}} \mathcal{G}$ является n-связным.

Последняя секция посвящена доказательству изоморфизма неабелевых гомологий и котроечных производных функтора копредела $\operatorname{colim}^{\mathscr{C}} : \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} \rightarrow \mathrm{Grp}$. Котройка $T = \Lambda\Omega$ строится с помощью сопряженных функторов $\Lambda : \mathrm{Grp}^{\mathrm{Ob}\mathscr{C}} \rightleftarrows \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} : \Omega$, где Ω сопоставляет каждой диаграмме $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$ ее ограничение на наибольшую дискретную категорию $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ категории $\mathscr{C}$, а Λ - левое расширение Кана вдоль вложения $\mathrm{Ob}\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}$. Исследование бар-резольвенты, полученной на основе котройки, показывает, что примение к этой резольвенте функтора копредела приводит к симплициальной группе, изоморфной симплициальной замене диаграммы групп. Значит, производные функтора копредела изоморфны неабелевым гомологиям.

2 Предварительные сведения

Мы работаем с симплициальными множествами. Придерживаемся обозначений из [15] и [24]. Гомотопические копределы будем рассматривать в категории пунктированных симплициальных множеств, основной источник - монография Бусфилда и Кана [3]. Будут применяться также пунктированные бисимплициальные множества, из книги Гоерсса и Жардине [17] и некоторые сведения о симплициальных группах и их гомотопических группах из работы Ву [34].

2.1 Обозначения

Выпишем основные определения и обозначения. Остальное будем приводить по ходу изложения.

- $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ - категория функторов из малой категории $\mathscr{C}$ в произвольную категорию $\mathscr{A}$. Функторы F из малой категории $\mathscr{C}$ в произвольную $\mathscr{A}$ называются диаграммами объектов категории $\mathscr{A}$ над $\mathscr{C}$ и могут обозначаться как семейство $\{F(c)\}_{c\in\mathscr{C}}$.
- $\Delta_{\mathscr{C}}A$ - функтор $\mathscr{C} \to \mathscr{A}$, принимающий на объектах постоянные значения $A \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}$, а на морфизмах равные 1_A.
- $\mathbb{N}$ - множество неотрицательных целых чисел.
- Cat - категория малых категорий и функторов.
- Set - категория множеств и отображений.
- Grp - категория групп и гомоморфизмов.

- 0 - группа, состоящая из одного элемента.
- Δ - категория конечных линейно упорядоченных множеств $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$, $n \geqslant 0$, и неубывающих отображений. Категория Δ порождена морфизмами следующего вида:
  1. $\partial_n^i : [n-1] \to [n]$ (при $0 \leqslant i \leqslant n$) - возрастающее отображение, образ которого не содержит i,
  2. $\sigma_n^i : [n+1] \to [n]$ (при $0 \leqslant i \leqslant n$) - неубывающая сюръекция, дважды принимающая значение i,
- $\operatorname{colim}_n^{\mathscr{C}} : \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Grp}$ ($\forall n \geqslant 0$) - функторы, сопоставляющие каждой диаграмме групп значения неабелевых гомологий этой диаграммы (определение будет дано в нашей работе),
- $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$ ($\forall n \geqslant 0$) - функторы абелевых гомологий, определенные в работе [15, Application II] как левые сателлиты функтора копредела, а в работе [20] как гомологии малых категорий с коэффициентами в диаграммах объектов абелевой категории.

Пусть $\Phi : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ - функтор между малыми категориями. Для произвольной категории $\mathscr{A}$ определен функтор обратного образа $\Phi^* : \mathscr{A}^{\mathscr{D}} \to \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$, сопоставляющий каждой диаграмме $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{D}}$ композицию $F\Phi = F \circ \Phi \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$, и каждому естественному преобразованию $\eta : F \to F'$ - естественное преобразование $\eta\Phi : F\Phi \to F'\Phi$ определенное по формуле $(\eta\Phi)_c = \eta_{\Phi(c)}$, для всех $c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Если $\mathscr{A}$ кополная категория, то функтор Φ^* имеет левый сопряженный функтор $Lan^{\Phi} : \mathscr{A}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{\mathscr{D}}$, который называется функтором левого расширения Кана.

Симплициальным множеством называется функтор $X : \Delta^{op} \to \mathrm{Set}$. Значения этого функтора на морфизмах, порождающих категорию Δ, обознаяаются через $d_i^n = X(\partial_n^i)$, $s_i^n = X(\sigma_n^i)$, для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

Симплициальным отображением $X \to Y$ между симплициальными множествами называется естественное преобразование. Категория симплициальных множеств обозначается через $\mathrm{Set}^{\Delta^{op}}$ или sSet.

Рассмотрим категорию симплексов $(\Delta \downarrow X)^{op}$ сиплициального множества X, дуальную к комма-категории (в смысле [24, Глава 2, §2.6]) над X относительно функтора вложения Ионеды $\Delta(-) : \Delta \to \mathrm{Set}^{\Delta^{op}}$. Ниже мы увидим (предложение 2.1), что для произвольной категории с копроизведениями $\mathscr{A}$ всякой диаграмме $F : (\Delta \downarrow X)^{op} \to \mathscr{A}$ соответствует симплициальный объект в $\mathscr{A}$, состоящий из копроизведений $\coprod_{x \in X_n} F(x)$. Этот объект используется для построения симплициальной замены диаграммы $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$.

Мы начнем изложение с исследования следующего вопроса. Существует два метода построения симплициальной замены. Бусфилд и Кан [3] определяют ее как симплицианый объект $\coprod\limits_{c_0 \leftarrow c_1 \leftarrow \ldots \leftarrow c_n} F(c_n)$. Квиллен [29] использует обозначение $\coprod\limits_{c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n} F(c_0)$. Мы покажем, что эти два способа приводят к изоморфным симплициальным объектам.

2.2 Диаграммы на категории симплексов

Рассмотрим категорию симплексов симплициального множества. Каждой диаграмме над этой категорией в категории с копроизведениями $\mathscr{A}$ соответствует симплициальный объект в $\mathscr{A}$. Мы опишем его операторы граней и вырождения.

Определение 2.1 *Пусть $X : \Delta^{op} \to \mathrm{Set}$ - симплициальное множество. Его категория симплексов состоит из множества объектов $\coprod\limits_{n \geqslant 0} X_n$. Морфизмы категории симплексов $(m,x) \xrightarrow{\alpha} (n,y)$ задаются с помощью неубывающих отображений $\alpha : [n] \to [m]$ таких, что $X(\alpha)(x) = y$. Композиция морфизмов равна*

$$((n,y) \xrightarrow{\beta} (p,z)) \circ ((m,x) \xrightarrow{\alpha} (n,y)) = ((m,x) \xrightarrow{\alpha\beta} (p,z))$$

Категория симплексов изоморфна $(\Delta \downarrow X)^{op}$, и мы будем обозначать ее тем же именем.

Нам понадобится слудующее утверждение о диаграммах $(\Delta \downarrow X)^{op} \to \mathscr{A}$ для категории $\mathscr{A}$ с копроизведениями.

Пусть $Q_X^{op} : (\Delta \downarrow X)^{op} \to \Delta^{op}$ обозначает забывающий функтор, определенный как $(m,x) \mapsto [m]$ на объектах и $(m,x) \xrightarrow{\alpha} (n,y) \mapsto \alpha : [n] \to [m]$ - на морфизмах. Рассмотрим левое расширение Кана $Lan^{Q_X^{op}} : \mathscr{A}^{(\Delta \downarrow X)^{op}} \to \mathscr{A}^{\Delta^{op}}$ вдоль функтора Q_X^{op}. Мы следуем определению левого расширения Кана данному в [24, §10.3], причем значения левого расширения Кана будут вычислятся поточечно. Следующее утверждение доказывается точно так же, как первая часть предложения [20, Proposition 3.2] для случая $\mathscr{D} = \Delta$.

Предложение 2.1 *Для всякой диаграммы $F : (\Delta \downarrow X)^{op} \to \mathscr{A}$ в категорию $\mathscr{A}$ с копроизведениями, значение $Lan^{Q_X^{op}} F$ равно симплициальному объекту, состоящему из объектов $Lan^{Q_X^{op}} F[n] = \coprod_{x \in X_n} F(x)$. Операторы границы d_i^n $(n \geqslant 1)$ и вырождения s_i^n $(n \geqslant 0)$ этого симплициального объекта определены как морфизмы, делающие коммутативными диаграммы для всех $x \in X_n$ и $0 \leqslant i \leqslant n$.*

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{x\in X_n} F(x) \arrow[r, "d_i^n"] & \coprod_{x\in X_{n-1}} F(x) \\
F(x) \arrow[u, "in_x"] \arrow[r, "F(x \xrightarrow{\partial_n^i} X(\partial_n^i)x)"'] & F(X(\partial_n^i)x) \arrow[u, "in_{X(\partial_n^i)x}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{x\in X_n} F(x) \arrow[r, "s_i^n"] & \coprod_{x\in X_{n+1}} F(x) \\
F(x) \arrow[u, "in_x"] \arrow[r, "F(x \xrightarrow{\sigma_n^i} X(\sigma_n^i)x)"'] & F(X(\sigma_n^i)x) \arrow[u, "in_{X(\sigma_n^i)x}"']
\end{tikzcd}
$$

Пример 2.2 *Если $\mathscr{A} = \mathrm{Grp}$, то для произвольной диаграммы групп F над категорией элементов $(\Delta \downarrow X)^{op}$ получаем симплициальную группу состоящую из свободных произведений групп $\mathop{\star}_{x \in X_n} F(x)$. Операторы границы и вырождения можно выписать явно*

1. $d_i^n(x \in X_n, f \in F(x)) = (X(\partial_n^i)x, F(x \xrightarrow{\partial_n^i} X(\partial_n^i)x)(f))$,

2. $s_i^n(x \in X_n, f \in F(x)) = (X(\sigma_n^i)x, F(x \xrightarrow{\sigma_n^i} X(\sigma_n^i)x)(f))$.

2.3 Симплициальная замена

Классифицирующим пространством малой категории $\mathscr{C}$ называется ее нерв - симплициальное множество $B\mathscr{C} = \mathrm{Cat}(-, \mathscr{C})|_\Delta : \Delta^{op} \to \mathrm{Set}$. Его n-мерные симплексы $x \in B_n\mathscr{C}$ можно рассматривать как функторы $x : [n] \to \mathscr{C}$ или последовательности морфизмов $c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} c_n$. Операторы границы $B\mathscr{C}(\partial_n^i) : B_n\mathscr{C} \to B_{n-1}\mathscr{C}$ выполняют отображение $x \in \mathrm{Cat}([n], \mathscr{C}) \mapsto x \circ \partial_n^i$ или, равносильно, они сопоставляют кортежу $(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} c_n)$, $c_i = x(i)$, одну из последовательностей

- $(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \to c_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}\alpha_i} c_{i+1} \to \dots \xrightarrow{\alpha_n} c_n)$, если $i > 0$,
- $(c_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} c_n)$, если $i = 0$.

Операторы вырождения $B\mathscr{C}(\sigma_n^i) : B_n\mathscr{C} \to B_{n+1}\mathscr{C}$ можно вычислять (для всех $0 \leqslant i \leqslant n$) по формуле $x \mapsto x \circ \sigma_n^i$ или как

$$(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} c_n) \mapsto (c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \xrightarrow{\alpha_{i-1}} c_i \xrightarrow{1_{c_i}} c_i \xrightarrow{\alpha_i} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} c_n).$$

Отсюда вытекает, что категории $\Delta \downarrow \mathscr{C}$ и $\Delta \downarrow B\mathscr{C}$ естественно изоморфны (по $\mathscr{C} \in \mathrm{Cat}$), и мы можем рассматривать их как равные категории.

Рассмотрим функторы

$$\mathscr{C} \xleftarrow{\partial_0} (\Delta \downarrow B\mathscr{C})^{op} \xrightarrow{Q^{op}_{B\mathscr{C}}} \Delta^{op},$$

первый из которых сопоставляет каждому $x : [m] \to \mathscr{C}$ соответствующему некоторому кортежу $(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \xrightarrow{\alpha_m} c_m)$ его начальный объект $x(0) = c_0$ и каждому морфизму $x \to y$ категории $(\Delta \downarrow \mathscr{C})$:

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[rr, "y"] & & \mathscr{C} \\
& {[m]} \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "x"'] &
\end{tikzcd}$$

морфизм $y(0) \xrightarrow{y(0 \leqslant g(0))} y(g(0)) = x(0)$ категории $\mathscr{C}$. Этот функтор ∂_0 контравариантен.

Функтор $Q^{op}_{B\mathscr{C}}$ равен определенному выше функтору Q^{op}_X при $X = B\mathscr{C}$.

Определение 2.3 *Функтор симплициальной замены* $\coprod : \mathscr{A}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{\Delta^{op}}$ *равен композиции левого расширения Кана* $Lan^{Q^{op}_{B\mathscr{C}}} : \mathscr{A}^{(\Delta\downarrow B\mathscr{C})^{op}} \to \mathscr{A}^{\Delta^{op}}$ *и функтора обратного образа* $\partial_0^* : \mathscr{A}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{(\Delta\downarrow B\mathscr{C})^{op}}$. *В частности, симплициальная замена всякой диаграммы* F *над* $\mathscr{C}$ *равна* $Lan^{Q^{op}_{B\mathscr{C}}}(F\partial_0)$.

Подставляя в предложение 2.1 вместо F композицию $F\partial_0$ и $X = B\mathscr{C}$, приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.2 *Симплициальная замена диаграммы* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ *состоит из объектов* $\coprod_n F = \coprod\limits_{c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n} F(c_0)$. *Операторы границы определены как морфизмы* $d_i^n : \coprod_n F \to \coprod_{n-1} F$, $0 \leqslant i \leqslant n$, *делающие коммутативной диаграмму ниже расположенную слева для каждого* i *из* *диапозона* $0 < i \leqslant n$, *а при* $i = 0$ *- справа:*

$$\begin{tikzcd} \coprod_n F \arrow[r, "d_i^n"] & \coprod_{n-1} F \\ F(c_0) \arrow[u, "in_{c_0\to\ldots\to c_n}"] \arrow[r, "="'] & F(c_0) \arrow[u, "in_{B\mathscr{C}(\partial_n^i)(c_0\to\ldots\to c_n)}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod_n F \arrow[r, "d_0^n"] & \coprod_{n-1} F \\ F(c_0) \arrow[u, "in_{c_0\to\ldots\to c_n}"] \arrow[r, "\alpha_1"'] & F(c_1) \arrow[u, "in_{(c_1\to\ldots\to c_n)}"'] \end{tikzcd}$$

Операторы вырождения $s_i^n : \coprod_n F \to \coprod_{n+1} F$ *определены как морфизмы, делающие коммутативными следующие диаграммы для всех* $0 \leqslant i \leqslant n$*:*

$$\begin{tikzcd} \coprod_n F \arrow[r, "s_i^n"] & \coprod_{n+1} F \\ F(c_0) \arrow[u, "in_{c_0\to\ldots\to c_n}"] \arrow[r, "="'] & F(c_0) \arrow[u, "in_{B\mathscr{C}(\sigma_n^i)(c_0\to\ldots\to c_n)}"'] \end{tikzcd}$$

В работе Бусфилда и Кана [3] рассматривается классифицирующее пространство дуальной категории $X = B\mathscr{C}^{op}$ и получают симплициальную замену $\coprod' F = Lan^{Q^{op}_{B\mathscr{C}^{op}}} F\partial$, где $\partial(c_0 \leftarrow c_1 \leftarrow \ldots \leftarrow c_n) = c_n$. Поскольку симплициальные множества $B\mathscr{C}$ и $B\mathscr{C}^{op}$ изоморфны, то полученные симплициальные замены будут изоморфны.

2.4 Гомотопический копредел в категории пунктированных симплициальных множеств

Симплициальное множество X называется пунктированным, если в нем выделена точка $\star_0 \in X_0$, которая называется отмеченной точкой в X.

Для произвольного симплициального множества X мы можем выделить любую точку $\star_0$ из множества X_0. Вместе с точкой $\star_0 \in X_0$, для каждого $n \geqslant 0$ будет присутствовать единственный симплекс $\star_n = X([n] \to [0])(\star_0) \in X_n$. Поскольку всякая диаграмма в категории Δ состоящая из морфизмов

$$\begin{tikzcd} {[0]} & & {[m]} \arrow[ll] \arrow[dl, "f"] \\ & {[n]} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

будет коммутативной, то грани и вырождения оставляют симплексы в этой последовательности, и мы можем рассматривать пунктированное симплициальное множество как функтор из Δ^{op} в категорию пунктированных множеств, значения которого равны $(X_n, \star_n)$. Категория пунктированных симплициальных множеств изоморфна категории функторов $\Delta^{op} \to \mathrm{Set}_\star$, но гомотопические группы рассматриваются относительно отмеченной точки $\star_0$.

Пусть $\mathrm{sSet} = \mathrm{Set}^{\Delta^{op}}$ - категория симплициальных множеств, и $\mathrm{sSet}_\star$ - категория пунктированных симплициальных множеств и симплициальных отображений, сохраняющих отмеченную точку.

Гомотопический копредел диаграммы пунктированных симплициальных множеств был введен Бусфилдом и Каном [3, глава XII]. В [3, лемма 5.2] доказано, что функтор гомотопического копредела $\mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} : (\mathrm{sSet}_\star)^{\mathscr{C}} \to \mathrm{sSet}_\star$ можно определить как композицию функторов

$$(\mathrm{sSet}_\star)^{\mathscr{C}} \xrightarrow{\coprod} (\mathrm{sSet}_\star)^{\Delta^{op}} = \mathrm{Set}_\star^{\Delta^{op}\times\Delta^{op}} \xrightarrow{\mathrm{diag}} \mathrm{Set}_\star^{\Delta^{\mathrm{op}}} = \mathrm{sSet}_\star,$$

где $F \mapsto \coprod F = Lan^{Q^{op}_{\mathscr{C}}} F\partial_0$ - функтор симплициальной замены для случая $\mathscr{A} = \mathrm{sSet}_\star$, а diag - функтор диагонали [3, глава XII], сопоставляющий каждому бисимплициальному множеству, состоящему из множеств $\{X([n],[p])\}_{([n],[p])\in\Delta^{op}\times\Delta^{op}}$ симплициальное множество $\{X([n],[n])\}_{([n])\in\Delta^{op}}$.

Пусть $F : \mathscr{C} \to \mathrm{sSet}_\star$ - произвольная диаграмма симплициальных пунктированных множеств. Ее симплициальная замена равна бисимплициальному множеству, у которого вертикальные (в смысле [17, Page 209]) симплициальные множества пунктированы и равны для каждого $n \geqslant 0$ копроизведению (и значит, букету) $\bigvee\limits_{c_0\to c_1\to\ldots\to c_n} F(c_0)$ по всем последовательностям морфизмов длины n.

Следовательно, гомотопический копредел, как диагональ полученного симплициального множества, равен пунктированному симплициальному множеству

$$(\mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} F)_n = \bigvee_{c_0\to c_1\to\ldots\to c_n} F(c_0)_n, \text{для всех } n \geqslant 0.$$

Пример 2.4 *Пусть* $\Delta_{\mathscr{C}} Y : \mathscr{C} \to \mathrm{sSet}_\star$ *- диаграмма, принимающая постоянные значения* Y. *Для того, чтобы построить* $hocolim^{\mathscr{C}} \Delta_{\mathscr{C}} Y$, *мы сначала построим гомотопический копредел диаграммы, в которой отмеченные точки рассматриваются как обычные. Пусть* $U : \mathrm{sSet}_\star \to \mathrm{sSet}$ *- функтор, забывающий отмеченные точки. Получим*

$$(\mathrm{diag} \coprod \Delta_{\mathscr{C}} Y)_n = \coprod_{c_0\to c_1\to\ldots\to c_n} Y_n = B_n\mathscr{C} \times Y_n.$$

Значит, симплициальное множество $\operatorname{hocolim}^{\mathscr{C}} U(\Delta_{\mathscr{C}} Y)$ *равно* $B\mathscr{C} \times Y$.

Возвращаясь к $\operatorname{hocolim}^{\mathscr{C}} \Delta_{\mathscr{C}} Y$, *обнаруживаем, что он состоит из пунктированных множеств* $\bigvee_{c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n} Y_n$, *равных множествам* $B_n\mathscr{C} \times Y_n$ *с отождествленными симплексами из* $B_n\mathscr{C} \times \star_n$. *Следовательно, гомотопический копредел диаграммы на* $\mathscr{C}$, *принимающей постоянные значения, равные пунктированному симплициальному множеству* Y *равны пунктированному симплициальному фактор-множеству*

$$(B\mathscr{C} \times Y) / (B\mathscr{C} \times \star).$$

3 Классифицирующее пространство симплициальной группы

Эта секция посвящена гомотопическим группам симплициальной группы. Всякой симплициальной группе соответствует диаграмма нервов над Δ^{op}. Доказано, что n-е гомотопические группы гомотопического копредела диаграммы нервов изоморфны $(n-1)$-м гомотопическим группам симплициальной группы для всех $n \geqslant 1$.

Мы придерживаемся определения гомотопической группы $\pi_n(X)$ пунктированного симплициального множества приведенного в [15, глава VI, §3]. В частности, при определении гомотопических групп симплициальной группы можно не учитывать ее групповую структуру. Но она является полным симплициальным множеством и сюръективные морфизмы симплициальных групп являются расслоениями.

3.1 Классифицирующее пространство группы

Если группу рассматривать как малую категорию, то для нее будет определен ее нерв – симплициальное множество, состоящее из множеств $G^{[n]} = \mathrm{Cat}([n], G)$ и отображений $G^{[n]} \to G^{[m]}$ соответствующих отображениям $[m] \to [n]$. Обозначим этот нерв через BG. Пусть EG – симплициальное множество, состоящее из множеств $E_nG = \{(g_0, \ldots, g_n) | (\forall i \in [n]) g_i \in G\}$. Оно является нервом категории, объектами которой служат $g \in G$, и для каждой пары объектов (g, g') существует единственный морфизм $g \to g'$. Гомотопические группы симплициального множества мы рассматриваем как гомотопические группы его геометрической реализации. Функтор из категории нулевых морфизмов в группу G дает симплициальное отображение нервов $EG \to BG$, которое является расслоением с дискретным слоем G. Это расслоение дает точную последовательность, приводящую к формулам

$$\pi_n(BG) \cong \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ G, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{для всех } n > 1. \end{cases}$$

(Здесь 1 обозначает множество, состоящее из единственного элемента.) Этот факт позволяет называть симплициальное множество BG *классифицирующим пространством* группы G.

3.2 Комплекс Мура и его группы гомологий

Пусть $G : \Delta^{op} \to \mathrm{Grp}$ – симплициальная группа.

Опишем комплекс Мура [27, Ch.II, §3.7] для вычисления гомотопических групп $\pi_n(G)$. С этой целью рассмотрим комплекс, состоящий из групп $N_nG = \bigcap\limits_{i>0} \mathrm{Ker}\,(d_i^n : G_n \to G_{n-1})$, при $n > 0$, и $N_0G = G_0$.

Его дифференциалы $d^n : N_nG \to N_{n-1}G$ определены как сужения гомоморфизмов d_0^n при $n > 0$, и $d^0 = 0$.

Гомотопические группы $\pi_n(G)$ изоморфны группам гомологий этого комплекса (см., [34, Chapter 3, Теорема 1.5]):

$$H_n(NG) = \mathrm{Ker}\,(d^n : N_nG \to N_{n-1}G) \big/ Im(d^{n+1} : N_{n+1}G \to N_nG).$$

Например, для постоянной симплициальной группы $G = \Delta G_0$, это дает изоморфизмы $\pi_0(G) \cong G_0$ и $\pi_n(G) = 0$ для всех $n > 0$.

Отметим, что группы $\pi_n(G)$ [33, Exercise 8.3.2] абелевы при $n \geqslant 1$, а при $n = 0$ могут быть некоммутативными.

3.3 Гомотопии симплициальной группы и ее классифицирующего пространства

Рассмотрим произвольное бисимплициальное множество $X(-,=)$. Пусть $\operatorname{diag} X(-,=)$ обозначает диагональ двойного симплициального множества. Она является симплициальным множеством, определенным как

$\operatorname{diag} X([n]) = X([n],[n])$. Бисимплициальное множество $X(-,=)$ называется пунктированным, если для каждого $m \geqslant 0$ симплициальное множество $X(m,=)$ пунктировано, т.е. имеет отмеченную вершину $x_m \in X(m,0)$, причем для каждого морфизма $\alpha \in \Delta([m],[n])$ должно быть выполнено равенство $X(\alpha)(x_n) = x_m$. Всякое бисимплициальное множество становится пунктированным, если в нем отметить элемент $x_0 \in X(0,0)$.

Пусть $G : \Delta^{op} \to \mathrm{Grp}$ – симплициальная группа. Рассмотрим бисимплициальное множество $G(-)^{[=]}$, сформированное из нервов групп, и состоящее из множеств $G(m)^{[n]} = B_n(G(m))$. Будем рассматривать его как пунктированное симплициальное множество, отмеченным элементом которого является единственный элемент множества $B_0(G(0))$

Лемма 3.1 *Пусть* $G : \Delta^{op} \to \mathrm{Grp}$ *– симплициальная группа. Тогда для всех* $n \geqslant 1$ *существуют естественные изоморфизмы*

$$\pi_n(\operatorname{diag} G(-)^{[=]}) \cong \pi_{n-1}G.$$

Доказательство. Для каждого $p \geqslant 0$ классифицирующее пространство группы $G(p)$ будет связным. Выбираем отмеченную точку, равную единственному 0-мерному симплексу пространства $BG(p)$, для каждого $p \geqslant 0$. Можно воспользоваться спектральной последовательностью Бусфилда-Фридландера [2] или спектральной последовательностью Цисмана (см. [7, Appendix A]) для бисимплициального множества $G(-)^{[=]}$:

$$E^2_{p,q} = \pi^h_p \pi^v_q G(-)^{[=]} \Rightarrow \pi_{p+q}(\operatorname{diag} G(-)^{[=]}).$$

Для каждого $p \geqslant 0$ группы $\pi_q G(p)^{[=]}$ изоморфны $G(p)$ при $q = 1$, и тривиальны при $q \neq 1$. Это приводит к вырождению спектральной последовательности и изоморфизмам $E^2_{p,1} \cong \pi_{p+1} \operatorname{diag} G(-)^{[=]}$. Следовательно, $\pi_p(G) \cong \pi_{p+1}(\operatorname{diag} G(-)^{[=]})$ для всех $p \geqslant 0$. $\square$

Замечание 3.1 *Существуют другие методы доказательства леммы 3.1, например, с помощью точной последовательности гомотопических групп для расслоения* $G \to \operatorname{diag} EG \to \operatorname{diag} BG$ *приводящей к естественному изоморфизму* $\pi_n \operatorname{diag}(BG) \cong \pi_{n-1} G$ *[17, Page 244].*

4 Неабелевы гомологии с коэффициентами в диаграмме групп

В этой секции введены неабелевы гомологии малой категории с коэффициентами в диаграмме групп. Они строятся как гомотопические группы симплициальной замены диаграммы групп. Эта замена является симплициальной группой, и значит n-е гомологии для всех $n \geqslant 0$ будут группами, причем коммутативными при $n \geqslant 1$.

4.1 Симплициальная замена диаграммы групп

Для произвольной малой категории $\mathscr{C}$ определены функторы

$$\mathscr{C} \xleftarrow{\partial_0} (\Delta \downarrow \mathscr{C})^{op} \xrightarrow{Q^{op}_{\mathscr{C}}} \Delta^{op}.$$

Пусть $\mathscr{A}$ - категория с копроизведениями. Для каждой диаграммы $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ определена ее симплициальная замена $\coprod F \in \mathscr{A}^{\Delta^{op}}$ как $\coprod F = Lan^{Q^{op}_{\mathscr{C}}}(F \circ \partial_0)$. Объект n-мерных симплексов симплициального объекта $\coprod F$ будет равен $(\coprod F)_n = \coprod\limits_{c_0 \to \cdots \to c_n} F(c_0)$. В частности для категории групп Grp, он будет равен свободному произведению $\star_{c_0 \to \cdots \to c_n} F(c_0)$, для категории абелевых групп Ab - прямой сумме $\oplus_{c_0 \to \cdots \to c_n} F(c_0)$, а в случае категории пунктированных симплициальных множеств $\mathrm{sSet}_\star$ он равен букету $\bigvee\limits_{c_0 \to \cdots \to c_n} F(c_0)$.

Предложение 4.1 *Пусть $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$ - диаграмма групп. Симплициальная группа $\coprod \mathcal{G}$ состоит из групп*

$$C_n(\mathscr{C}, \mathcal{G}) = \mathop{\star}_{c_0 \to \cdots \to c_n} \mathcal{G}(c_0).$$

Ее граничные операторы $d^i_n : C_n(\mathscr{C}, \mathcal{G}) \to C_{n-1}(\mathscr{C}, \mathcal{G})$ и операторы вырождения $s^i_n : C_n(\mathscr{C}, \mathcal{G}) \to C_{n+1}(\mathscr{C}, \mathcal{G})$, при $0 \leqslant i \leqslant n$, действуют на элементах сомножителей свободных произведений по формулам

$$d^i_n(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \to \cdots \to c_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} c_n, x) =$$
$$= \begin{cases} (c_1 \xrightarrow{\alpha_2} c_2 \to \cdots \to c_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} c_n, \mathcal{G}(\alpha_1)(x)), & \text{если } i = 0, \\ (c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \to \cdots \to c_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}\alpha_i} c_{i+1} \to \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n, x), & \text{если } i > 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$s_n^i(x, c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \to \cdots \to c_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} c_n) = \\ (c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \to \cdots \to c_i \xrightarrow{id} c_i \to \cdots \to c_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} c_n, x), \quad (4)$$

где x обозначает произвольный элемент группы $\mathcal{G}(c_0)$.

4.2 Неабелевы гомологии диаграммы групп

Согласно предложению 4.1, в качестве симплициальной замены диаграммы групп можно использовать симплициальную группу $C_*(\mathscr{C}, \mathcal{G})$. Мы отмечаем это в следующем определении неабелевых гомологий:

Определение 4.1 *Для произвольной малой категории $\mathscr{C}$ и диаграммы групп $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$, n-ми гомологиями категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в $\mathcal{G}$ называются группы $\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G} := \pi_n(\coprod \mathcal{G}) = \pi_n(C_*(\mathscr{C}, \mathcal{G}))$, для всех $n \geqslant 0$.*

Для случая, когда категория $\mathscr{C}$ является конечным частично упорядоченным множеством, для вычисления неабелевых гомологий можно применять формулу для гомотопических групп симплициальной группы, доказанную Castiglioni и Ladra [8, теорема 25]. Мы объясняем ниже, что это можно делать.

Пусть $K_0, K_1, \cdots, K_m$ - нормальные подгруппы произвольной группы G. Расширенным коммутантом этих подгрупп называется подгруппа

$$[[K_0, K_1, \cdots, K_m]] := \prod_{I \sqcup J = \{0,1,\ldots,m\}} [\cap_{i \in I} K_i, \cap_{j \in J} K_j].$$

Например, $[[K_0, K_1]] = [K_0, K_1]$; $[[K_0, K_1, K_2]] = [K_0, K_1 \cap K_2][K_1, K_0 \cap K_2][K_2, K_0 \cap K_1]$.

Предложение 4.2 *Пусть $n \geqslant 1$ - натуральное число, и пусть $\mathscr{C}$ - малая категория, в которой для каждой последовательности морфизмов $c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \xrightarrow{\alpha_2} c_2 \to \ldots \to c_{k-1} \xrightarrow{\alpha_k} c_k$, не равных тождественным, верно соотношение $k \leqslant n$. Тогда для каждой диаграммы $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$ неабелевы гомологии для всех $m \geqslant n$ изоморфны следующим фактор-группам*

$$\mathrm{colim}_m^{\mathscr{C}} \mathcal{G} \cong (K_0 \cap K_1 \cap \cdots \cap K_m) \big/ [[K_0, K_1, \ldots, K_m]],$$

где $K_i = \mathrm{Ker}\, d_i^m$ для всех $0 \leqslant i \leqslant m$.

Доказательство. Симплекс $(c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_k, x \in \mathcal{G}(c_0))$ симплициальной группы $C_*(\mathscr{C}, \mathcal{G})$ будет вырожденным тогда и только тогда, когда среди морфизмов $c_i \to c_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, существует тождественный. Значит, при заданных условиях, группа $C_{n+1}(\mathscr{C}, \mathcal{G})$ порождена вырожденными симплексами. Согласно [8], отсюда следует, что образ $(n+1)$-го дифференциала комплекса Мура, $d^{n+1}(N_{n+1}C_*(\mathscr{C}, F))$, равен $[[K_0, K_1, \ldots, K_n]]$, и $\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G} \cong K_0 \cap K_1 \cap \cdots \cap K_n / [[K_0, K_1, \ldots, K_n]]$. Если $m \geqslant n$, то $C_{m+1}(\mathscr{C}, \mathcal{G})$ тем более будет порождена вырожденными симплексами. Значит, доказываемая формула верна для всех $m \geqslant n$. $\square$

5 Связь неабелевых гомологий с гомотопическими копределами

В этой секции доказано, что n-е неабелевы гомологии диаграммы групп изоморфны $(n+1)$-м гомотопическим группам гомотопического копредела диаграммы классифицирующих пространств групп этой диаграммы.

5.1 Гомотопические группы букета классифицирующих пространств групп

Нам понадобится лемма о перестановочности функтора классифицирующего пространства с копроизведениями с точностью до гомотопии.

Копроизведение в категории пунктированных симплициальных множеств будем называть букетом. Согласно [3, Ch. XII, §3.1], букет слабо эквивалентен гомотопическому копределу диаграммы над дискретной категорией в категории пунктированных симплициальных множеств.

Лемма 5.1 *Для произвольного семейства групп существует слабая эквивалентность* $\bigvee_{i\in I} BG_i \approx B(\underset{i\in I}{\star} G_i)$.

Доказательство. Заметим, что это утверждение вытекает из более общей теоремы, принадлежащей Уайтхеду [14, Theorem 4.0]. Нам будет достаточно воспользоваться естественной слабой эквивалентностью $B(G_1 * G_2) \approx BG_1 \vee BG_2$ вытекающей из утверждения доказанного в [9, Lemma 3.8].

В случае конечного множества I это утверждение доказывается по индукции. Если же I бесконечно, то воспользуемся слабой эквивалентностью $\bigvee_{i\in J} BG_i \approx B(\underset{i\in J}{\star} G_i)$ для каждого конечного подмножества $J \subseteq I$. Переходя к копределу по множеству конечных подмножеств и используя утверждение [3, Ch. XII, §3.5] о том, что копредел пунктированных симплициальных множеств по направленной категории слабо эквивалентен гомотопическому копределу, получаем утверждение данной леммы. □

5.2 Неабелевы гомологии и гомотопические группы гомотопического копредела

Мы рассматриваем гомотопические копределы в категории пунктированных симплициальных множеств. Гомотопический копредел классифицирующих пространств будет рассматриваться как пунктированное симплициальное множество, имеющее единственную вершину.

Теорема 5.2 *Для произвольной диаграммы групп* $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$ *и для всех* $n \geqslant 0$ *существуют естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G} \cong \pi_{n+1}(\mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G}). \tag{5}$$

Доказательство. По лемме 3.1, для всякой симплициальной группы $G \in \mathrm{Grp}^{\Delta^{op}}$ существует естественный изоморфизм

$$\pi_{n+1}\mathrm{diag}\, BG \cong \pi_n(G), \text{ для всех } n \geqslant 0, \tag{6}$$

которым мы хотим восползоваться.

С помощью леммы 5.1 для каждого $n \geqslant 0$ приходим к слабой эквивалентности

$$(B \coprod \mathcal{G})_n = B \underset{c_0\to\ldots\to c_n}{\star} \mathcal{G}(c_0) \approx \bigvee_{c_0\to\ldots\to c_n} B\mathcal{G}(c_0) = (\coprod B\mathcal{G})_n.$$

Эта слабая эквивалентность будет естественной по $[n] \in \Delta$. Рассмотрим бисимплициальные пунктированные множества $B \coprod \mathcal{G}$ и $\coprod B\mathcal{G}$ как диаграммы $\Delta^{op} \to \mathrm{sSet}_*$. Гомотопический копредел по $[n] \in \Delta^{op}$ приводит к слабой эквивалентности $\mathrm{hocolim}^{\Delta^{op}} B \coprod \mathcal{G} \approx \mathrm{hocolim}^{\Delta^{op}} \coprod B\mathcal{G}$. Для всякого пунктированного бисимплициального множества $Y \in \mathrm{sSet}_*^{\Delta}$ существует естественная (по Y) слабая эквивалентность $\mathrm{hocolim}^{\Delta} Y \approx \mathrm{diag}\, Y$

[3, ch XII, §4.3]. Это приводит к слабой эквивалентности диагоналей $\operatorname{diag} B \coprod \mathcal{G} \approx \operatorname{diag} \coprod B\mathcal{G}$.

Используя эту слабую эквивалентность диагоналей и подставляя $G = \coprod \mathcal{G}$ в формулу (6), приходим к естественному изоморфизму (по $\mathcal{G}$):

$$\pi_{n+1}(\operatorname{diag} \coprod B\mathcal{G}) \cong \pi_{n+1}(\operatorname{diag} B \coprod \mathcal{G}) \cong \pi_n(\coprod \mathcal{G}), \text{ для всех } n \geqslant 0. \quad (7)$$

По лемме о симлициальной замене [3, Ch. XII, 5.2], для всякой диаграммы пунктированных симплициальных множеств, гомотопический копредел $\operatorname{hocolim}^{\mathscr{C}} Y$ естественно слабо эквивалентен $\operatorname{diag} \coprod Y$. Значит, левая часть формулы (7) равна $\pi_{n+1}(\operatorname{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G})$. По определению 4.1 правая часть изоморфизма (7) равна $\operatorname{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G}$. Формула (5) получена. □

Замечание 5.1 *Похожая формула в других терминах приведена Тоеном в работе [26, Page 136], без доказательства.*

Замечание 5.2 *Для построения пунктированного гомотопического копредела с помощью теоремы Томасона [32, Theorem 1.2], нужны дополнительные действия, поскольку теорема Томасона была доказана для непунктированных гомотопических копределов.*

В случае $\mathscr{C} = \Delta^{op}$ будут существовать изоморфизмы

$$\operatorname{colim}_n^{\Delta^{op}} \mathcal{G} \cong \pi_{n+1} \operatorname{hocolim}^{\Delta^{op}} B\mathcal{G}.$$

Откуда с помощью естественной слабой эквивалентности $\operatorname{hocolim}^{\Delta^{op}} B\mathcal{G} \to \operatorname{diag} B\mathcal{G}$ [3, Ch XII.3.4] и леммы 3.1, показывающей, что $\pi_{n+1}(\operatorname{diag} B\mathcal{G}) \cong \pi_n(\mathcal{G})$, $n \geqslant 0$, получаем

Следствие 5.3 *Для произвольной симплициальной группы $\mathcal{G} \in \mathrm{Grp}^{\Delta^{op}}$ и целого неотрицательного n имеет место изоморфизм*

$$\operatorname{colim}_n^{\Delta^{op}} \mathcal{G} \cong \pi_n(\mathcal{G}).$$

Для абелевых гомологий эта формула была доказана в [3, XII.5.6], в случае когда $\mathcal{G}$ - симплициальная абелева группа.

5.3 Абелевы гомологии диаграмм над свободной категорией

Пусть $\mathcal{A} : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ - диаграмма абелевых групп. За определение n-х абелевых гомологий $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} \mathcal{A}$ можно взять гомотопические группы $\pi_n(\coprod \mathcal{A})$ симплициальной замены диаграммы абелевых групп $\mathcal{A}$. Они будут изоморфны группам гомологий симплициальной абелевой группы, состоящей из прямых сумм $C_n(\mathscr{C}, \mathcal{A}) = \oplus_{c_0 \to \cdots \to c_n} \mathcal{A}(c_0)$ с граничными операторами d_n^i и операторами вырождения s_n^i, действующими на элементах слагаемых прямых сумм по формулам (3)-(4) из предложения 4.1. Группы абелевых гомологий изоморфны группам гомологий комплекса абелевых групп

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0(\mathscr{C}, \mathcal{A}) \xleftarrow{d_1} C_1(\mathscr{C}, \mathcal{A}) \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} C_n(\mathscr{C}, \mathcal{A}) \xleftarrow{d_{n+1}} \dots$$

дифференциалы которого равны $d_0 = 0$ и $d_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^n d_n^i$, при $n \geqslant 1$. Таким образом,

$$\varinjlim\nolimits_n^{\mathscr{C}} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}, \text{ для всех } n \geqslant 0.$$

Пусть $\mathscr{C} = W\Gamma$ - свободная категория, порожденная графом $\Gamma = (A \underset{s}{\overset{t}{\rightrightarrows}} V)$, где A - множество стрелок (направленных ребер), V - множество вершин, $s : A \to V$ сопоставляет каждой стрелке ее начало, а $t : A \to V$ - конец.

Для вычисления $\varinjlim_1^{W\Gamma} \mathcal{A}$ в работе [19, Definition 2.1] было предложено следующее

Определение 5.3 *Потоком на графе $\Gamma = (A \underset{s}{\overset{t}{\rightrightarrows}} V)$ с коэффициентами в диаграмме $\mathcal{A} : W\Gamma \to \mathrm{Ab}$ называется элемент $f = (f_\gamma)_{\gamma \in A} \in \bigoplus_{\gamma \in A} \mathcal{A}(s(\gamma))$ такой, что для для каждой вершины $v \in V$ выполнено соотношение*

$$\sum_{s(\gamma) \in v} f_\gamma = \sum_{t(\gamma) = v} \mathcal{A}(\gamma)(f_\gamma).$$

Множество потоков является подгруппой абелевой группы $\bigoplus_{\gamma \in A} \mathcal{A}(s(\gamma))$. Доказано [19, Theorem 2.5], что эта подгруппа потоков изоморфна $\varinjlim_1^{W\Gamma} \mathcal{A}$.

Пример 5.4 *Рассмотрим граф, состоящий из двух вершин a, b и двух стрелок $a \xrightarrow{u_0} b$ и $a \xrightarrow{u_1} b$. Обозначим через $\upuparrows$ свободную категорию, порожденную этим графом, она получена из графа добавлением тождественные морфизмов 1_a и 1_b. Пусть $\mathcal{A} : \upuparrows \to \mathrm{Ab}$ диграмма абелевых групп. Поток на графе, порождающем $\upuparrows$, задается парой элементов $f_{u_0}, f_{u_1} \in \mathcal{A}(a)$ таких, что $f_{u_0} + f_{u_1} = 0$ и $\mathcal{A}(u_0)(f_{u_0}) + \mathcal{A}(u_1(f_{u_1}) = 0$. Отсюда следует, что каждый поток задается произвольным элементом $f_{u_0} \in \mathcal{A}(a)$, таким, что $(\mathcal{A}(u_0) - \mathcal{A}(u_1))(f_{u_0}) = 0$. Следовательно $\varinjlim_1^{\upuparrows} \mathcal{A} = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}(u_0) - \mathcal{A}(u_1))$.*

5.4 Сравнение и приложение абелевых и неабелевых гомологий диаграмм групп

Применим неабелевы и абелевы гомологии диаграмм групп для разработки метода нахождения ненулевой гомотопической группы наименьшей размерности для гомотопического копредела классифицирующих пространств групп.

Для случая когда копредел диаграммы групп равен тривиальной группе, для диаграмм определенных на свободных категориях, изучим условия при которых изоморфны первые группы неабелевых и абелевых гомологий.

Содержание данной подсекции основано на следующем утверждении, вытекающем из теоремы 5.2:

Следствие 5.4 *Для произвольных малой категории $\mathscr{C}$ и диаграммы $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$ существует изоморфизм*

$$\pi_1(\mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G}) \cong \mathrm{colim}^{\mathscr{C}} \mathcal{G}. \tag{8}$$

В частности, гомотопический копредел диаграммы классифицирующих пространств групп односвязен тогда и только тогда, когда копредел диаграммы групп равен тривиальной группе.

Пример 5.5 *Не лишним будет проверить проверить формулу (8) для диаграммы принимающей значения $\mathcal{G}(c) = 0$, для всех $c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Поскольку $B(0) = \star$, то согласно примеру 2.4, получаем $hocolim^{\mathscr{C}}(\Delta_{\mathscr{C}}\star) = B\mathscr{C} \times \star / B\mathscr{C} \times \star = \star$ и изоморфизм (8).*

Рассмотрим задачу нахождения $n \geqslant 0$, такого, что $\mathrm{colim}_k^{\mathscr{C}} \mathcal{G} = 0$ для всех $0 \leqslant k < n$ и $\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G} \neq 0$. Это число n будет называться косвязностью (coconnection) диаграммы групп $\mathcal{G}$ и обозначаться $\mathrm{cocon}\, \mathcal{G}$. Если $\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} \mathcal{G} = 0$ для всех $n \geqslant 0$, то будем говорить, что косвязность диаграммы бесконечна и писать $\mathrm{cocon}\, \mathcal{G} = \infty$. Косвязность диаграммы $\mathcal{G}$ равна наибольшему n, при котором пространство $\mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G}$ является n-связным.

Пусть $\upuparrows$ категория, порожденная графом, состоящем из пары параллельных стрелок, рассмотренная в примере 5.4.

Пример 5.6 *Пусть* $\mathcal{G} : \upuparrows \to \mathrm{Grp}$ - *диаграмма, принимающая значения* $\mathcal{G}(b) = S_3$ - *группа перестановок трех элементов,* $\mathcal{G}(a) = A_3$ - *подгруппа четных перестановок,* $\mathcal{G}(u_0) : A_3 \to S_3$ - *вложение знакопеременной группы в симметрическую группу,* $\mathcal{G}(u_1) : A_3 \to S_3$ - *гомоморфизм, принимающий постоянные значения равные нейтральному элементу.*

Поскольку $\mathrm{colim}^{\upuparrows} \mathcal{G} = \mathrm{Coker}\, \mathcal{G}(u_0) = S_3/A_3 = \mathbb{Z}_2$, *то получаем, что группа* $\pi_1(\mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G}) = \mathbb{Z}_2)$ *не тривиальна, и* $\mathrm{cocon}\, \mathcal{G} = 0$.

Если в рассмотренной диаграмме $\mathcal{G}$ *заменить группу* A_3 *на циклическую подгруппу второго порядка* $\mathbb{Z}_2 \subset S_3$, *то будет верно равенство* $\mathrm{colim}^{\upuparrows} \mathcal{G} = S_3/\langle \mathbb{Z}_2 \rangle^{S_3} = 0$, *и мы получим* $\mathrm{cocon}\, \mathcal{G} \geqslant 1$.

Прежде, чем вернуться к примеру 5.6, исследуем условия при которых значения функтора неабелевых гомологий $\mathrm{colim}_1^{\mathscr{C}} : \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Grp}$ изоморфны значениям функтора абелевых гомологий $\varinjlim_1^{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$.

Для этой цели нам понадобится спектральная последовательность Бусфилда-Кана [3, Ch. XII, §5.7], которая существует для произвольной диаграммы пунктированных множеств $X(-) : \mathscr{C} \to \mathrm{sSet}$ и расположена в первой четверти

$$E^2_{p,q} = \varinjlim_p^{\mathscr{C}} \{\tilde{H}_q X(c)\}_{c \in \mathscr{C}} \Rightarrow \tilde{H}_{p+q}(\mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} X), \tag{9}$$

где $\tilde{H}_n$ обозначают приведенные группы гомологий пунктированных симплициальных множеств [15, Приложение II, §2], $n \geqslant 0$.

Предложение 5.5 *Пусть* $\mathcal{G} : W\Gamma \to \mathrm{Grp}$ - *диаграмма групп над свободной категорией* $W\Gamma$, *порожденной произвольным графом в смысле [24, §2.7]. Мы будем предполагать, что* $\mathrm{colim}^{W\Gamma} \mathcal{G} = 0$. *Существует естественный (по* $\mathcal{G} \in \mathrm{Grp}^{W\Gamma}$*) гомоморфизм групп*

$$f : \mathrm{colim}_1^{W\Gamma} \mathcal{G} \to \varinjlim_1^{W\Gamma} \mathcal{G}_{ab},$$

где $\mathcal{G}_{ab}$ - абелианизация диаграммы $\mathcal{G}$. Этот гомоморфизм f будет изоморфизмом если и только если $\operatorname{colim}^{W\Gamma} H_2(\mathcal{G}) = 0$. *В частности, f будет изоморфизмом, если $\mathcal{G}$ - диаграмма свободных групп.*

Доказательство. Группа неабелевых гомологий $\operatorname{colim}_0^{W\Gamma}\mathcal{G}$ в размерности $n = 0$ изоморфна $\operatorname{colim}^{W\Gamma}\mathcal{G}$, и значит равна 0 по условию.

Вычислим первую группу неабелевых гомологий диаграммы $\mathcal{G} : W\Gamma \to \mathrm{Grp}$. Поскольку $\operatorname{colim}^{W\Gamma}\mathcal{G} = 0$, то $\pi_1(\operatorname{hocolim}^{W\Gamma} B\mathcal{G}) = 0$ (следствие 5.4). Из теоремы Гуревича следует, что группа $\pi_2(\operatorname{hocolim}^{W\Gamma} B\mathcal{G})$ изоморфна второй целочисленной группе гомологий $H_2(\operatorname{hocolim}^{W\Gamma} B\mathcal{G})$. Для вычисления этой группы применим спектральную последовательность (9) для диаграммы $X = B\mathcal{G}$ классифицирующих пространств. В данном случае она будет вырождаться для всех $n \geqslant 2$ в короткие точные последовательности

$$0 \to \operatorname{colim}^{W\Gamma} H_n(B\mathcal{G}) \to H_n(\operatorname{hocolim}^{W\Gamma} B\mathcal{G}) \to \varinjlim\nolimits_1^{W\Gamma} H_{n-1}(B\mathcal{G}) \to 0 \quad (10)$$

где $\varinjlim_1^{W\Gamma} H_{n-1}(B\mathcal{G})$ обозначает первую абелеву группу гомологий категории $W\Gamma$ с коэффициентами в диаграмме $H_{n-1}(B\mathcal{G})$.

Поскольку $H_2(\operatorname{hocolim}^{W\Gamma} B\mathcal{G}) \cong \pi_2(\operatorname{hocolim}^{W\Gamma} B\mathcal{G}) \cong \operatorname{colim}_1^{W\Gamma}\mathcal{G}$, и существуют изоморфизмы $H_1(B\mathcal{G}(c)) \cong \mathcal{G}(c)_{ab}$, $H_2(B(\mathcal{G}(c))) \cong H_2(\mathcal{G}(c))$, то при $n = 2$ точная последовательность (10) приводит к естественной по $\mathcal{G}$ точной последовательности

$$0 \to \operatorname{colim}^{W\Gamma} H_2(\mathcal{G}) \to \operatorname{colim}_1^{W\Gamma}\mathcal{G} \to \varinjlim\nolimits_1^{W\Gamma}\mathcal{G}_{ab} \to 0.$$

Она показывает, что гомоморфизм $f : \operatorname{colim}_1^{W\Gamma}\mathcal{G} \to \varinjlim_1^{W\Gamma}\mathcal{G}_{ab}$ будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{colim}^{W\Gamma} H_2(\mathcal{G}) = 0$.

В частности, если диаграмма $\mathcal{G}$ состоит из свободных групп, то она может быть задана с помощью копредставления $\langle E|R\rangle$, в котором $R = \{1\}$, откуда по формуле Хопфа (см. [4, теорема II.5.3]) группы гомологий $H_2(\mathcal{G}(c))$ будут равны 0, и значит, в этом случае гомоморфизм f будет изоморфизмом. □

Следующий пример продолжает исследование диаграммы групп, начатое в примере 5.6.

Пример 5.7 *Наша цель найти косвязность диаграммы*

$$\mathcal{G} = \left(\mathbb{Z}_2 \overset{<}{\underset{0}{\rightrightarrows}} S_3 \right),$$

принимающую на объектах значения $\mathcal{G}(a) = \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{G}(b) = S_3$, *а на морфизмах* $\mathcal{G}(u_0) : \mathbb{Z}_2 \to S_3$ *является вложениеи циклической подгруппы порядка* 2 *в группу* S_3, *а* $\mathcal{G}(u_1)$ *- гомоморфизмом на тривиальную подгруппу. Мы установили (см. пример 5.6), что* $\operatorname{colim}^{\upuparrows}\mathcal{G} = 0$, *откуда пространство* $\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}$ *будет односвязным. По теореме Гуревича получаем* $\pi_2(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}) \cong H_2(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G})$.

Поскольку $\upuparrows$ *- свободная категория, то будет точна последовательность (10) и она приведет при* $n = 2$ *к точной последовательности*

$$0 \to \operatorname{colim}^{\upuparrows} H_2(\mathcal{G}) \to H_2(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}) \to \varinjlim\nolimits_1^{\upuparrows} H_1(\mathcal{G}) \to 0 \qquad (11)$$

Поскольку $H_2(\mathbb{Z}_2) = 0$ *(см., например, [23, §4.2]) и* $H_2(S_3) = 0$ *[35], то диаграмма* $H_2(\mathcal{G})$ *равна паре гомоморфизмов тривиальных групп* $0 \rightrightarrows 0$, *откуда* $\operatorname{colim}^{\upuparrows} H_2(\mathcal{G}) = 0$. *Диаграмма* $H_1(\mathcal{G})$ *состоит из двух гомоморфизмов* $\mathbb{Z}_2 \rightrightarrows (S_3)_{ab} = \mathbb{Z}_2$, *один из которых - тождественный, поскольку* $\mathcal{G}(u_0)$ *- коретракция, а другой равен нулевому гомоморфизму* $H_1(\mathcal{G}(u_1)) = \mathcal{G}(u_1)_{ab}$, *ибо* $\mathcal{G}(u_1)$ *- нулевой гомоморфизм. Применяя метод вычисления значений функтора* $\varinjlim\nolimits_1^{\upuparrows}$ *(пример 5.4), получим* $\varinjlim\nolimits_1^{\upuparrows} H_1(\mathcal{G}) = 0$. *Точная последовательность (11) приводит к* $H_2(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}) = 0$. *Следовательно,* $\operatorname{colim}_1^{\upuparrows}\mathcal{G} = 0$, $\operatorname{cocon}\mathcal{G} \geqslant 2$ *(пространство* $\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}$*) двухсвязно) и*

$$\pi_3(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G})) \cong H_3(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}))$$

по теореме Гуревича.

Для вычисления $H_3(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}$ *у нас была построена точная последовательность (10), которая при* $n = 3$ *равна точной последовательности*

$$0 \to \operatorname{colim}^{\upuparrows} H_3(\mathcal{G}) \to H_3(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}) \to \varinjlim\nolimits_1^{\upuparrows} H_2(\mathcal{G}) \to 0 \qquad (12)$$

Мы показали, что диаграмма $H_2(\mathcal{G})$ *состоит из нулей, откуда следует, что* $\varinjlim\nolimits_1^{\upuparrows} H_2(\mathcal{G}) = 0$ *и существует изоморфизм* $H_3(\operatorname{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}) \cong \operatorname{colim}^{\upuparrows} H_3(\mathcal{G})$. *Диаграмма* $H_3(\mathcal{G})$ *остоит из абелевых групп* $H_3(\mathcal{G}(a)) = H_3(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ *[23, §4.2] и* $H_3(\mathcal{G}(b)) = H_3(S_3) \cong \mathbb{Z}_6$ *[35], между которыми заданы два гомоморфизма. Так как вложение* $\mathcal{G}(u_0) : \mathbb{Z}_2 \to S_3$ *- коретракция, то гомоморфизм* $H_3(\mathcal{G}(u_0)) : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6$ *будет мономорфизмом. Поскольку нулевой гомоморфизм* $\mathcal{G}(u_1) : \mathbb{Z}_2 \to S_3$ *равен композиции* $\mathbb{Z}_2 \to 0 \to S_3$, *то гомоморфизм* $H_3(\mathcal{G}(u_1))$ *пропускается через группу* $H_3(0) = 0$ *и значит* $H_3(\mathcal{G}(u_1))$ *будет нулевым гомоморфизмом. Отсюда* *копредел* $\mathrm{colim}^{\upuparrows} H_3(\mathcal{G})$ *изоморфен коядру мономорфизма* $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6$. *Следовательно этот копредел изоморфен фактор-группе* $\mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_3$.

Получаем следующий ответ: косвязность диаграммы $\mathcal{G}$ *равна* 2, *и*

$$\mathrm{colim}_2^{\upuparrows}\mathcal{G} = \pi_3(\mathrm{hocolim}^{\upuparrows} B\mathcal{G}) = \mathbb{Z}_3.$$

Замечание 5.8 *С помощью следствия 5.4 получаем следущее упрощение формулировки вопроса, приведенного в начале статьи Фарджоуна [13]. Это вопрос о существовании функтора* $\Phi : Grp^{\mathscr{C}} \to Grp$, *такого, что для всякой диаграммы связных и пунктированных пространств* X_* *верно* $\Phi(\pi_1 X_*) \cong \pi_1 \mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} X_*$.

Если такой функтор Φ *существует, то для* $X_* = B\mathcal{G}$ *он будет давать изоморфизмы* $\Phi(\pi_1 B\mathcal{G}) \cong \pi_1 \mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} B\mathcal{G} \cong \mathrm{colim}^{\mathscr{C}}\mathcal{G}$, *и значит* $\Phi(\mathcal{G}) \cong \mathrm{colim}^{\mathscr{C}}\mathcal{G}$.

Значит, вопрос можно поставить следующим образом: Верно ли, что для всякой диаграммы связных и пунктированных пространств X_* *существует естественный изоморфизм* $\mathrm{colim}^{\mathscr{C}}\pi_1 X_* \cong \pi_1 \mathrm{hocolim}^{\mathscr{C}} X_*$.

Замечание 5.9 *Для категории* $\mathscr{C}$ *обладающей инициальным объектом формула (8) может быть получена из [13, Corollary 5.1].*

Пример 5.10 *Приведем пример, который может подвергнуть сомнению формулу (8) (причем для категория* $\mathscr{C}$ *не имеющей инициального объекта). Пусть* $\mathscr{C} = \upuparrows$. *Рассмотрим диаграмму в категории* sSet, *состоящую из* $X(a) = \Omega$ *- симплициальная окружность (коуравнитель пары* $\Delta(\partial^0), \Delta(\partial^1) : \Delta[0] \rightrightarrows \Delta[1]$) *[15, II.2.5.2], и пусть* $X(b) = \Delta[0]$. *Морфизмы* $X(u_0) = X(u_1) : X(a) \to X(b)$ *определены как единственные морфизмы в терминальный объект.*

Геометрическая реализация гомотопического копредела непунктированных симплициальных множеств $\mathrm{hocolim}^{\upuparrows} X$ *состоит из двух конусов над окружностью, вершины которых отождествлены. Следовательно, этот гомотопический копредел гомотопически эквивалентен сфере, две точки которой отождествлены. Его фундаментальная группа вычисляется с помощью теоремы Ван Кампена, как показано в [36]. Она равна* $\pi_1(\mathrm{hocolim}^{\upuparrows} X) = \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим ту же диаграмму, у которой в Ω *и в* $\Delta[0]$ *отмечены единственные вершины.*

Построение гомотопического копредела в sSet_* *происходит по шагам [3, XII.2]. Первый шаг - строим букет значений на объектах. В нашем* *случае этот букет будет равен* $(\Omega, \star)$ *(пространство* $X(b) = \{\star\}$ *отождествится с базовой точкой). Потом надо приклеить к полученному букету редуцированные цилиндры отображений* $X(u_0), X(u_1) : X(a) \to X(b)$ *(и в общем случае процесс продолжается дальше). В нашем случае это будут круги с общей границей, равной окружности. Отмеченные точки соединять не надо, они уже отождествлены. Следовательно, геометрическая реализация пунктированной диаграммы равна сфере. Откуда для диаграммы пунктированных множеств выполнено* $\pi_1(\mathrm{hocolim}^{\upuparrows} X) = 0$.

Замечание 5.11 *Рассмотренный в примере 5.10 гомотопический копредел непунктированных симплициальных множеств слабо эквивалентен* $S^1 \vee S^2$. *Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно заменить отождествленные точки на отрезок. Пример 5.10 хорошо иллюстрирует метод Фаржоуна (описанного в [18, Proposition 18.8.4]) для построения гомотопического копредела диаграммы пунктированных симплициальных множеств из непунктированных, полученных с помощью забывания пунктированности. Этот гомотопический копредел равен фактор пространству непунктированного гомотопического копредела по нерву категории, над которой задана диаграмма. В нашем случае классифицирующее пространство категории равно окружности, и метод Фаржоуна дает* $\mathrm{hocolim}^{\upuparrows} X \approx S^2$.

6 Производные копредела и неабелевы гомологии для диаграмм групп

Котроечные производные функторы были введены и изучены в работе Барра и Бека [1]. Они восходят к работе Годемана [16, Приложение. Стандартные симплициальные резольвенты]. Мы придерживаемся терминологии из работы Суона [31]. Докажем, что значения котроечных левых производных функтора копредела на диаграмме групп над малой категорией изоморфны неабелевым гомологиям малой категории с коэффициентами в этой диаграмме.

6.1 Левые производные относительно котройки

Пусть $\mathscr{A}$ - произвольная категория. Аугментированным симплициальным объектом (A_*, ϵ, A) в ней называется симплициальный объект A_* в $\mathscr{A}$ вместе с объектом $A \in \mathscr{A}$ и морфизмом $\epsilon : A_0 \to A$, удовлетворяющим соотношению $\epsilon d_0^1 = \epsilon d_1^1$.

Пусть (T, ϵ, μ) - котройка над $\mathscr{A}$. Она определяет аугментированный симплициальный функтор

$$(T_*, \epsilon, Id_{\mathscr{A}}), \tag{13}$$

где T_* - симплициальный функтор, состоящий из функторов $T_n = T^{n+1}$, $n \geqslant 0$, и естественных преобразований границы $d_i^n = T^i \epsilon T^{n-i} : T_n \to T_{n-1}$ (при $n \geqslant 1$) и вырождения $s_i^n = T^i \mu T^{n-i} : T_n \to T_{n+1}$ (при $n \geqslant 0$), для всех $0 \leqslant i \leqslant n$. Аугментация $\epsilon : T_0 = T \to Id$ равна коединице котройки.

Рассмотрим произвольный функтор $G : \mathscr{A} \to \mathrm{Grp}$ в категорию групп. Применение функтора G к аугментированному симплициальному функтору (13) приводит к аугментированному симплициальному объекту

$$(GT_*, G\epsilon, G)$$

в категории функторов $\mathscr{A} \to \mathrm{Grp}$.

Определение 6.1 *Левые производные функторы функтора $G : \mathscr{A} \to \mathrm{Grp}$ относительно котройки T над $\mathscr{A}$ определяются по формуле*

$$L_n G(A) := \pi_n(GT_*(A)), \forall A \in \mathscr{A}, \forall n \geqslant 0.$$

Элементами группы $L_0 G(A) = \pi_0(GT_*(A))$ являются компоненты связности симплициальной группы $GT_*(A)$, а отображение $G(\epsilon_A)$ постоянно на каждой компоненте связности. Отсюда получаем отображение $L_0 G(A) \to G(A)$ индуцированное аугментацией $G(\epsilon_A) : GT_0(A) \to G(A)$.

Мы будем рассматривать категорию $\mathscr{A} = \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}}$ для некоторой произвольной малой категории $\mathscr{C}$ и функтор копредела $\mathrm{colim}^{\mathscr{C}} : \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Grp}$.

6.2 Котройка для построения резольвенты

Обозначим через $O : \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \xrightarrow{\subseteq} \mathscr{C}$ вложение наибольшой дискретной подкатегории в $\mathscr{C}$. Котройка $T = \Lambda\Omega$ строится из пары сопряженных функторов

$$\Lambda : \mathrm{Grp}^{\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} : \Omega.$$

Здесь функтор $\Omega = O^*$ сопоставляет каждой диаграмме $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$ композицию $F \circ O : Ob\mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$. Таким образом $\Omega(F)(c) = F(c)$ для всех $c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

Функтор $\Lambda = Lan^O$ равен левому расширению Кана вдоль $O : Ob\mathscr{C} \to \mathscr{C}$. Он сопоставляет каждому $A \in \mathrm{Grp}^{\mathrm{Ob}\mathscr{C}}$ диаграмму, переводящую каждый $c \in \mathscr{C}$ в группу $(\Lambda A)(c) = \mathop{\star}\limits_{c_0 \to c} A(c_0)$, равную свободному произведению групп, по множеству морфизмов $c_0 \to c$ в категории $\mathscr{C}$. Получаем котройку $(T = \Lambda\Omega, \varepsilon, \Lambda\eta\Omega)$.

Опишем единицу $\eta : Id \to \Omega\Lambda$ и коединицу $\varepsilon : \Lambda\Omega \to Id$ сопряжения $\Lambda \dashv \Omega$. Элементы из $\mathop{\star}\limits_{c_0 \to c} A(c_0)$, для $A \in \mathrm{Grp}^{Ob\mathscr{C}}$, состоят из пар $(c_0 \xrightarrow{\alpha_0} c, x \in A(c_0))$. Естественное преобразование η определяется на $A \in \mathrm{Grp}^{Ob\mathscr{C}}$ по формуле

$$(\eta A)_c(x \in A(c)) = (c \xrightarrow{1_c} c, x \in A(c)) \in \mathop{\star}\limits_{c_0 \to c} A(c_0).$$

Естественное преобразование ε обладает следующим свойством. Для каждого $c \in \mathscr{C}$ морфизм $(\Lambda\Omega F)(c) = \mathop{\star}\limits_{c_0 \to c} F(c_0) \xrightarrow{(\varepsilon F)_c} F(c)$ делает коммутатиными треугольники для всех $c_0 \to c$:

$$\begin{tikzcd}
\mathop{\star}\limits_{c_0 \to c} F(c_0) \arrow[rr, "\varepsilon F_c"] & & F(c) \\
& F(c_0)_{c_0 \to c} \arrow[ul, "in_{c_0 \to c}"] \arrow[ur, "F(c_0 \to c)"'] &
\end{tikzcd}$$

Значит, на элементах коединица сопряжения действует по формуле

$$\varepsilon F_c(c_0 \to c, x \in F(c_0)) = (c, F(c_0 \to c)(x)).$$

6.3 Производные функтора копредела

Определение 6.2 *Левыми производными* $L_n \mathrm{colim}^{\mathscr{C}} : \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Grp}$*,* $n \geqslant 0$*, называются левые производные функтора копредела относительно котройки* $(T, \epsilon, \mu) = (\Lambda\Omega, \varepsilon, \Lambda\eta\Omega)$.

Построим резольвенту. В общем случае она состоит из функторов $T_n = T^{n+1}$, $n \geqslant 0$, граничных естественных преобразований $d_i^n = T^i \varepsilon T^{n-i} : T^{n+1} \to T^n$, $0 \leqslant i \leqslant n$, и вырождений $s_i^n : T^i \mu T^{n-i} = T^i \Lambda\eta\Omega T^{n-i} : T^{n+1} \to T^{n+2}$.

Лемма 6.1 *Наша резольвента состоит из функторов, значения которых на $F \in \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}}$ и $c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ равны группам*

$$(T^{n+1}F)(c) = \mathop{\star}_{c_0 \to c} \mathop{\star}_{c_1 \to c_0} \cdots \mathop{\star}_{c_n \to c_{n-1}} F(c_n).$$

Каждый элемент из $T^{n+1}F(c)$ описывается парой состоящей из кортежа и элемента группы

$$(c \xleftarrow{\alpha_0} c_0 \xleftarrow{\alpha_1} c_1 \leftarrow \cdots \leftarrow c_{n-1} \xleftarrow{\alpha_n} c_n, x \in F(c_n))$$

Для описания операторов границы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 6.2 *Естественные гомоморфизмы $(\varepsilon TF)_c : T^2F(c) \to TF(c)$ отображают элементы из $\mathop{\star}_{c_0 \to c} \mathop{\star}_{c_1 \to c_0} F(c_1)$ в $\mathop{\star}_{c_1 \to c} F(c_1)$ по формуле*

$$(\varepsilon TF)_c(c_1 \xrightarrow{\alpha_1} c_0 \xrightarrow{\alpha_0} c, x \in F(c_1)) = (c_1 \xrightarrow{\alpha_0\alpha_1} c, x \in F(c_1)).$$

Опишем операторы границы и вырождения участвующие в резольвенте:

Предложение 6.3 *Операторы границы $(d_i^n F)_c : T_nF(c) \to T_{n-1}F(c)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, действуют по формуле*

$$(d_i^n F)_c(c_n \xrightarrow{\alpha_n} c_{n-1} \to \ldots \to c_0 \xrightarrow{\alpha_0} c, x \in F(c_n)) =$$
$$\begin{cases} (c_n \xrightarrow{\alpha_n} c_{n-1} \to \ldots \to c_{i+1} \xrightarrow{\alpha_i\alpha_{i+1}} c_{i-1} \to \ldots \to c_0 \xrightarrow{\alpha_0} c, x \in F(c_n)), & i < n, \\ (c_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} c_{n-2} \to \ldots \to c_0 \xrightarrow{\alpha_0} c, F(\alpha_n)(x) \in F(c_{n-1})), & i = n. \end{cases}$$

Доказательство В случае $i < n$ эта формула следует из леммы 6.2, с помощью подстановки $T^{n-i}F$ вместо F, примененной к естественному преобразованию $\varepsilon T^{n-i}F : TT^{n-i}F \to T^{n-i}F$.

Если $i = n$, то $d_i^n F = T^n \varepsilon F$. Гомоморфизм $(\varepsilon F)_c : TF(c) = \mathop{\star}_{c_0 \to c} F(c_0) \to F(c)$ действует как $(\varepsilon F)_c(c_0 \xrightarrow{\alpha_0} c, x \in F(c_0)) = F(\alpha_0)(x) \in F(c)$. Подставляя вместо F функтор T^nF, получим $T^nTF(c) \to T^nF(c)$, откуда

$$(T^n\varepsilon F)_c(c \leftarrow c_0 \leftarrow \ldots \leftarrow c_{n-1} \xleftarrow{\alpha_n} c_n, x \in F(c_n)) =$$
$$(c \leftarrow c_0 \leftarrow \ldots \leftarrow c_{n-1}, F(c_n \xrightarrow{\alpha_n} c_{n-1})(x)).$$

$\square$

Напомним, что мы ввели n-е группы неабелевых гомологий $\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} F$ малой категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в диаграмме групп F как гомотопические группы симплициальной замены $\pi_n(\coprod F)$. Предложение 4.1 содержит определение симплициальной группы $C_*(\mathscr{C}, F)$ и утверждает, что эта симплициальная группа равна $\coprod F$.

Теорема 6.4 *Для произвольной малой категории $\mathscr{C}$ и диаграммы групп $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$ группы $L_n \mathrm{colim}^{\mathscr{C}} F$ изоморфны неабелевым гомологиям $\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} F$ с коэффициентами в F для всех $n \geqslant 0$.*

Доказательство Достаточно доказать, что $\mathrm{colim}^{\mathscr{C}} T_* F \cong C_*(\mathscr{C}, F)$ для всех $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$. Поскольку $\Lambda = \mathrm{Lan}^O$, то для всякой диаграммы групп $A \in \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}}$ верны соотношения

$$\mathrm{colim}^{\mathscr{C}} \Lambda A = \mathrm{colim}^{Ob\mathscr{C}} A = \mathop{\star}_{c_0 \in Ob\mathscr{C}} A(c_0).$$

Отсюда следует для каждого $n \geqslant 0$ справедливость равенств

$$\begin{aligned} \mathrm{colim}^{\mathscr{C}} (\Lambda\Omega)^{n+1} F &= \mathop{\star}_{c_0 \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}} (\Lambda\Omega)^n F(c_0) = \\ \mathop{\star}_{c_0 \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}} \mathop{\star}_{c_1 \to c_0} (\Lambda\Omega)^{n-1} F(c_1) &= \mathop{\star}_{c_0 \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}} \mathop{\star}_{c_1 \to c_0} \mathop{\star}_{c_2 \to c_1} (\Lambda\Omega)^{n-2} F(c_2) = \cdots \\ \cdots &= \mathop{\star}_{c_n \to c_{n-1} \to \ldots \to c_0} F(c_n) \end{aligned}$$

Изменяя обозначения символов в кортежах $c_n \to c_{n-1} \to \ldots \to c_0$, c_i на c'_{n-i} для всех $0 \leqslant i \leqslant n$, получим кортежи $c'_0 \to c'_1 \to \ldots \to c'_n$ и симплициальную группу состоящую из групп $\mathop{\star}_{c'_0 \to c'_1 \to \ldots \to c'_n} F(c'_0)$, граничные операторы которой равны $d'^n_i = d^n_{n-i}$, а операторы вырождения равны $s'^n_i = s^n_{n-i}$. Получим равенства симплициальных групп

$$\mathop{\star}_{c_n \to c_{n-1} \to \ldots \to c_0} F(c_n) = \mathop{\star}_{c'_0 \to c'_1 \to \ldots \to c'_n} F(c'_0) = \mathop{\star}_{c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n} F(c_0)$$

Согласно определениям, производные копредела равны гомотопическим группам симплициальной группы

$$\pi_n(\mathrm{colim}^{\mathscr{C}} T_n F) = \pi_n(\mathrm{colim}^{\mathscr{C}} (\Lambda\Omega)^{n+1} F),$$

а неабелевы гомологии - группам $\pi_n(C_*(\mathscr{C}, F))$. Значит, они изоморфны. $\square$

Теорема 6.4 показывает, что значения производных функтора копредела $\mathrm{colim}^{\mathscr{C}} : \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Grp}$ на всякой диаграмме F равны гомотопическим группам симплициальной замены $\pi_n(C_*(\mathscr{C}, F))$. Докажем, что каждому эпиморфизму в категории $\mathrm{Grp}^{\mathscr{C}}$ соответствует длинная точная последовательность в категории групп. Для этой цели докажем следующее утверждение.

Лемма 6.5 *Пусть $f : F \to F''$ - эпиморфизм в категории $\mathrm{Grp}^{\mathscr{C}}$. Тогда соответствующий ему гомоморфизм $C_*(\mathscr{C}, f) : C_*(\mathscr{C}, F) \to C_*(\mathscr{C}, F'')$ в категории $\mathrm{Grp}^{\Delta^{op}}$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Функтор симплициальной замены, переводящий диаграммы в соответствующие им симплициальные группы равен композиции функторов $Lan^{Q^{op}_{B\mathscr{C}}} \circ \partial^\star$ (Определение 2.3). Каждый из этих функторов является левым сопряженным, и значит переводит эпиморфизм в эпиморфизм. $\square$

Введем обозначение $\mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}}(F \xrightarrow{f} F'') := \pi_n(\mathrm{Ker}\,(C_*(\mathscr{C}, f)))$. Это определяет функтор на категории, объектами которой служат эпиморфизмы в категории $\mathrm{Grp}^{\mathscr{C}}$, а морфизмами $f \to g$ - коммутативные квадраты

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d] & F'' \arrow[d] \\ G \arrow[r, two heads, "g"] & G'' \end{tikzcd}$$

Поскольку эпиморфизм симплициальных групп является расслоением Кана, то Теорема 6.4 и Лемма 6.5 приводят к следующему утверждению.

Следствие 6.6 *Для всякого эпиморфизма $f : F \to F''$ в категории $\mathrm{Grp}^{\mathscr{C}}$ существует длинная точная последовательность*

$$\begin{aligned} \ldots \to \mathrm{colim}_{n+1}^{\mathscr{C}} F \to \mathrm{colim}_{n+1}^{\mathscr{C}} F'' \to \mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}}(F \xrightarrow{f} F'') \\ \to \mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} F \to \mathrm{colim}_n^{\mathscr{C}} F'' \to \ldots \to \mathrm{colim}_0^{\mathscr{C}} F \to \mathrm{colim}_0^{\mathscr{C}} F'' \to 0, \end{aligned}$$

где $\mathrm{colim}_0^{\mathscr{C}} = \mathrm{colim}^{\mathscr{C}}$.

Замечание 6.3 *В некоторых случаях, для гомологий и когомологий, определенных с помощью котороек, длинные точные последовательности сопоставляются расслоениям [11]. Необходимость в этом отпадает в нашем случае, ибо этими расслоениями у нас являются морфизмы $f : F \to F''$, для которых гомоморфизмы f_c являются ретракциями для всех $c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.*

7 Заключение

Для произвольной малой категории $\mathscr{C}$ мы ввели неабелевы гомологии категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в диаграммах групп и доказали, что они изоморфны производным функтора копредела $\mathrm{colim} : \mathrm{Grp}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Grp}$. Мы предложили формулу, связывающую неабелевы гомологии с гомотопическими группами гомотопического копредела классифицирующих пространств. Эта формула дает метод исследования неабелевых гомологий, и наоборот, существуют приложения неабелевых гомологий в теории гомотопий. Мы надеемся, что это будет способствовать развитию методов вычисления гомотопических групп и обобщению теорем классической теории гомологий малых категорий на неабелевы гомологии.

Список литературы

[1] Barr M., Beck J. *Homology and standard constructions.* Seminar on triples and categorical homology theory (Lecture Notes in Mathematics, V. 80), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1969, P. 245-335.

[2] Bousfield A.K., Friedlander E.M. *Homotopy theory of* Γ*-spaces, spectra, and bisimplicial sets*, (Lecture Notes in Mathematics, V.658), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1978, P.80-150.

[3] Bousfield A. K., Kan D. M. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, (Lecture Notes in Mathematics V. 304), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972.

[4] Brown K. S. *Cohomology of groups*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[5] Brown R. *Some problems in non-abelian homotopical and homological algebra*. Homotopy theory and related topics. (Lecture Notes in Mathematics V. 1418), Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1990, P.105-129.

[6] Brown R., Higgins P. J., Sivera R. *Nonabelian Algebraic Topology*. Zürich: European Mathematical Society, 2011.

[7] Brown R., Loday J.-L. *Van Kampen Theorems for the Diagrams of Spaces*. Topology. 1987. V. 26. P.311-315.

[8] Castiglioni J. L., Ladra M. *Peiffer elements in simplicial groups and algebras*. Journal of Pure and Applied Algebra. 2008. V.212. P. 2115-2128.

[9] Dwyer W.G., Kan D.M. *Simplicial localizations of categories*. Journal of Pure and Applied Algebra. 1980. V.17. P. 267-284.

[10] W.G. Dwyer, D.M. Kan *A classification theorem for diagrams of simplicial sets*, Topology, **23**:2 (1984), 139–155.

[11] Ellis G.J. *Relative derived functors and the homology of groups*. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques. 1990. T. 31, N.2 . P. 121-135

[12] Ellis G., Mikhailov R. *A colimit of classifying spaces*. Advances in Mathematics. 2010. V. 223. P. 2097-2113.

[13] Farjoun E. D. *Fundamental group of homotopy colimits*. Advances in Mathematics. 2004. V.182. P. 1-27.

[14] Fiedorowicz Z. *Classifying Spaces of Topological Monoids and Categories*. American Journal of Mathematics. 1984. V. 106, N. 2. P.301-350.

[15] Gabriel P., Zisman M. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.

[16] Godement R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris: Hermann, 1958.

[17] Goerss P.G., Jardine J.F. *Simplicial Homotopy Theory*, (Modern Birkhäuser Classics), Basel: Birkhäuser, 2009.

[18] Hirschhorn P.S. *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[19] Husainov A. A., Çalışıcı H. *Flows in graphs and the homology of free categories.* Algebra Discrete Math. 2003. Issue 2, P. 36-46.

[20] Husainov A. A. *Homology and cohomology of cubical sets with coefficients in systems of objects*, Preprint, New York: Cornell University, 2022. https://arxiv.org/abs/2207.07233

[21] Ivanov O.I., Mikhailov R., Wu J. *On Nontriviality of Certain Homotopy Groups of Spheres.* Homology Homotopy Appl. 2016. V. 18, N 2, P.337-344.

[22] Kan, D. M. *A Combinatorial Definition of Homotopy Groups.* Annals of Mathematics, Second Series. 1958. V. 67, N 2. P. 282-312.

[23] Kuzmin Yu. V. *Homological group theory.* Moscow: "Factorial Press", 2006 (Advanced Studies in Mathematics and Mechanics 1) (Russian).

[24] Mac Lane S. *Categories for the Working Mathematician.* New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998 (Graduate Texts in Mathematics 5).

[25] Mikhailov R., Wu J. *On homotopy groups of the suspended classifying spaces.* Algebraic and Geometric Topology. 2010. V. 10. P. 565-625.

[26] Moerdijk I., Toën B. *Simplicial presheaves as stacks.* Simplicial Methods for Operads and Algebraic Geometry. Basel: Springer, 2010. P. 127-141.

[27] Quillen D. *Homotopical Algebra.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. (Lecture Notes in Mathematics V.43), 1967.

[28] Quillen D.G. *Spectral sequences of a double semi-simplicial group.* Topology. 1966. V.5, N 2. P.155-157.

[29] Quillen D. G. *Higher algebraic K-theory: I.* Bass H. (eds) Higher K-Theories. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. (Lecture Notes in Mathematics, V. 341). 1973. P. 85-147.

[30] Romero A., Rubio J. *Homotopy groups of suspended classifying spaces: an experimental approach*. Mathematics of computation. 2013. V.82, N 284. P. 2237-2244.

[31] Swan R. G. *Some Relations between Higher K-Functors*. J. Algebra. 1972. V. 21. P. 113-136.

[32] Thomason R. W. *Homotopy colimits in the category of small categories*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. V. 85, N. 1. 91-109.

[33] Weibel C. A. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[34] Wu J. *Simplicial objects and homotopy groups*. Braids. Introductory Lectures on Braids, Configurations and their Applications. Hackensack: World Scientific. 2010, P. 31-181.

[35] https://mathoverflow.net/questions/180637/cohomology-of-symmetric-groups

[36] https://math.stackexchange.com/questions/2296538/fundamental-group-of-the-sphere-with-two-points-identified