СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 33, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1992

УДК 513.83

А. А. ХУСАИНОВ

О ГРУППАХ РАСШИРЕНИЙ В КАТЕГОРИИ АБЕЛЕВЫХ ДИАГРАММ

Данная работа является развитием работ автора [1, 2] и посвящена исследованию групп расширений в категории функторов из малой категории в абелеву категорию.

Изучение вопросов вырождения Ext^n в категории функторов $\mathbf{C}\mathcal{A}$ из малой категории $\mathbf{C}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}$ при больших n предпринималось многими авторами. Одним из первых результатов такого рода можно считать теорему Гильберта о цепях сизигий, в которой утверждается, что если $\mathbf{C}$ — свободный коммутативный моноид, порожденный N образующими, а $\mathcal{A}$ — категория векторных пространств над полем k, то глобальная размерность категории $\mathbf{C}\mathcal{A}$ диаграмм из $\mathbf{C}$ в $\mathcal{A}$ равна N. Наиболее общие результаты в этом направлении были получены [3, 4] методом интерпретации элементов группы $\mathrm{Ext}^n(A, B)$ в виде точных последовательностей.

Цель данной работы состоит в построении спектральной последовательности, связывающей функторы расширений Ext^n, определенные на категории функторов $\mathbf{C}\mathcal{A}$, с группами расширений в абелевой категории $\mathcal{A}$, возможно, не обладающей достаточным числом проективных или инъективных объектов. Эта спектральная последовательность позволяет уточнить некоторые результаты из [3, 4] о глобальной размерности.

1. Когомологии категории с коэффициентами

Данный пункт посвящен определениям и фактам, необходимым для понимания основных результатов работы.

Ниже *диаграммами* будут иногда называться функторы, определенные на малых категориях. По данной малой категории $\mathbf{C}$ строится категория факторизаций [5], которую обозначим через $\mathbf{C}'$. Множество $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}')$ состоит из морфизмов $\alpha, \beta, \ldots$ категории $\mathbf{C}$, а множество морфизмов $\mathbf{C}'(\alpha, \beta)$ — из пар (x, y) морфизмов категории $\mathbf{C}$ таких, что композиция x, α, y определена и $x \circ \alpha \circ y = \beta$. Обозначим через Δ категорию конечных линейно-упорядоченных множеств $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ и монотонных отображений. *Натуральной системой* [6] (объектов абелевой категории $\mathcal{A}$) на $\mathbf{C}$ называется произвольная диаграмма $F\colon \mathbf{C}' \to \mathcal{A}$. Пусть $\Delta/\mathbf{C}$ — категория, объектами которой служат функторы вида $\sigma\colon [m] \to \mathbf{C}$, а морфизмами — тройки $(f\colon [m] \to [n],\ \sigma\colon [m] \to \mathbf{C},\ \sigma'\colon [n] \to \mathbf{C})$ такие, что $\sigma' \circ f = \sigma$. Существует функтор $\delta\colon \Delta/\mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, сопоставляющий функтору $\sigma\colon [m] \to \mathbf{C}$ морфизм $\sigma\ (0 \leqslant m)$ и коммутативному треугольнику $(f\colon [m] \to [n],\ \sigma\colon [m] \to \mathbf{C},\ \sigma'\colon [n] \to \mathbf{C})$ функторов — морфизм $\sigma\ (0 \leqslant m) \to \sigma'\ (0 \leqslant n)$ категории $\mathbf{C}'$, равный паре морфизмов $(\sigma(m) \to \sigma'(n),$

© 1992 Хусаинов А. А.

$\sigma'(0) \to \sigma(0)$). Пусть F — натуральная система (объектов категории $\mathscr{A}$) на $\mathbf{C}$. Композиция функторов $F \circ \delta$ образует когомологическую систему коэффициентов на нерве $N_*\mathbf{C}$ категории $\mathbf{C}$ [7]. Стандартно [8, с. 278] строится косимплициальный объект (подробнее, см. п. 1.2) $\Pi^n(\mathbf{C}, F) = \Pi_{\sigma \in N_n \mathbf{C}} F(\delta(\sigma)) = \Pi F(\alpha_n \circ \alpha_{n-1} \circ \ldots \circ \alpha_1)$, где справа стоит произведение по всем последовательностям стрелок, композиции которых определены.

1.1. Определение. *Когомологиями $H^n(\mathbf{C}, F)$ категории $\mathbf{C}$ с коэффициентами в натуральной системе F: $\mathbf{C}' \to \mathscr{A}$* называются объекты когомологий косимплициального комплекса $\Pi^*(\mathbf{C}, F)$.

Напомним некоторые факты из теории когомологий категорий, часто используемые ниже. Пусть S: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ — функтор между малыми категориями. Для каждого объекта $d \in \mathbf{D}$ определена комма-категория S/d — слой S над d. Множество объектов $\mathrm{Ob}(S/d)$ состоит из пар $(c, \alpha$: $S(c) \to d)$, а морфизмами между (c, α) и (c', α') служат тройки $(\beta$: $c \to c'$, α, $\alpha')$ такие, что $\alpha' \circ S(\beta) = \alpha$. Забывающий функтор Q_d: $S/d \to \mathbf{C}$ сопоставляет тройке (или паре) ее первый элемент. Двойственно определяется кослой d/S. Для любой категории $\mathscr{A}$ определен функтор ограничения $(-)S$: $\mathbf{D}\mathscr{A} \to \mathbf{C}\mathscr{A}$, сопоставляющий диаграмме F из $\mathbf{D}$ в $\mathscr{A}$ ее композицию с функтором S. Если в $\mathscr{A}$ существуют пределы, то $(-)S$ обладает правым сопряженным, правым расширением Кана Ran_S: $\mathbf{C}\mathscr{A} \to \mathbf{D}\mathscr{A}$. Если в $\mathscr{A}$ существуют копределы, то $(-)S$ обладает левым сопряженным Lan^S: $\mathbf{C}\mathscr{A} \to \mathbf{D}\mathscr{A}$, левым расширением Кана. Пусть теперь произведения в $\mathscr{A}$ точны. Производные (правые сателлиты) функтора предела по категориям $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ связаны спектральной последовательностью Андре $E_2^{i,j} = \lim^i_{\mathbf{D}} \mathrm{Ran}^j_S F \Rightarrow \lim^{i+j}_{\mathbf{C}} F$. Производные (правые сателлиты) функтора Ran_S можно вычислять по кослоям: $\mathrm{Ran}^j F(d) = \lim^j F Q_d$. Теорема Оберста утверждает, что если слои S/d функтора S имеют гомологии точки, т. е. $\forall d \in \mathbf{D}$ $H_n(S/d) \simeq H_n(pt)$ $(n \geqslant 0)$, то $\lim^n F \simeq \lim^n FS$ для всякой диаграммы F: $\mathbf{D} \to \mathscr{A}$ [9]. Функтор S в этом случае будет называться *конфинальным*.

1.2. Предложение. *Пусть F — натуральная система (объектов категории $\mathscr{A}$) на $\mathbf{C}$. Тогда $\lim^n_{\mathbf{C}'} F \simeq H^n(\mathbf{C}, F)$ в каждом из следующих двух случаев*:

(1) *абелева категория $\mathscr{A}$ допускает точные произведения*,

(2) *категория $\mathbf{C}$ конечна, $\mathscr{A}$ — произвольная абелева категория.*

Доказательство. Рассмотрим функтор δ: $\Delta/\mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, сопоставляющий последовательности морфизмов их композицию. Категория δ/α изоморфна $\Delta/((c/\mathbf{C})/\alpha)$, если c — область определения морфизма α, поэтому нерв категории δ/α стягиваем и $\lim^n_{\mathbf{C}'} F \simeq \lim^n_{\Delta/\mathbf{C}} F\delta$ при $n \geqslant 0$ по теореме Оберста [9]. По определению косимплициального объекта, соответствующего когомологической системе коэффициентов, $\Pi^*(\mathbf{C}, F) \simeq \mathrm{Ran}_{QN\mathbf{C}}(F \circ \delta)$, где $QN\mathbf{C}$: $\Delta/\mathbf{C} \to \Delta$ — забывающий функтор. Известно, что когомологии $H^n C^*$ любого косимплициального объекта C^*: $\Delta \to \mathscr{A}$ изоморфны $\lim^n_\Delta C^*$ [8]. С другой стороны, $\lim^n_\Delta \mathrm{Ran}_{QN\mathbf{C}}(F\delta) \simeq \lim^n_{\Delta/\mathbf{C}}(F\delta)$ [10, предложение 2.3], поэтому $\lim^n_{\Delta/\mathbf{C}}(F\delta) \simeq H^n(\Pi^*(\mathbf{C}, F))$, откуда следует утверждение предложения в первом случае. Пусть теперь категория $\mathbf{C}$ конечна. Существует точное полное вложение [3] $\mathscr{A}$ в категорию с точными произведениями, в которой когомологии комплексов $\{\Pi_{c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n} F(c_0 \to c_n)\}$ и $\{\Pi_{\alpha_0 \to \alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n} F(\alpha_n)\}$ изоморфны, так как когомологии второго комплекса изоморфны $\lim^n_{\mathbf{C}'} F$. Остальное следует из перестановочности вложения с конечными произведениями.

Предложение 1.2 в частном случае диаграмм абелевых групп было доказано ранее в работе [6, теорема 4.4].

2. Спектральная последовательность расширений

В данном пункте доказываются основные теоремы.

Пусть E — множество. Будем говорить, что *абелева категория* $\mathscr{A}$ *допускает* E*-суммы*, если для любого семейства объектов $\{A_e\}_{e\in E}$ из $\mathscr{A}$ существует сумма $\sum A_e \in \mathscr{A}$. Будем говорить, что $\mathscr{A}$ *допускает точные* E*-суммы*, если функтор $\sum_{e\in E}$: $E\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ точен.

В дальнейшем нам понадобится небольшое усиление леммы из работы [10] в применении к функтору $\mathrm{Hom}(-, G)$.

2.1. Лемма. *Если в* $\mathscr{B}$ *достаточно проективных объектов и* $\mathscr{B}$ *допускает* $\mathrm{Ob}(I)$*- и* $\mathrm{Ob}(I/i)$*-суммы для всех* i *из малой категории* I, *то для любого функтора* T: $I \to \mathscr{B}$ *существуют две спектральные последовательности, сходящиеся к одному пределу*

$$\lim\nolimits_{I^0}^{p} \{\mathrm{Ext}^q (T(i), G)\} \Rightarrow H^{p+q}, \quad \mathrm{Ext}^p \left(\mathrm{colim}_q^I T, G\right) \Rightarrow H^{p+q}.$$

Доказательство. Существует проективная резольвента T^* диаграммы T, обладающая следующими свойствами [10]:

(1) $\forall n \geqslant 0$, $\forall i \in I$ объекты $T^n(i)$ проективны в $\mathscr{B}$,

(2) $\forall n \geqslant 0$, $\forall G \in \mathscr{B}$ функтор $\mathscr{B}(T^n(-), G)$: $I^0 \to Ab$ lim-ацикличен.

Гиперкогомологии функтора lim: $I^0Ab \to Ab$ по отношению к комплексу $K^n(i) = \mathscr{B}(T^n(i), G)$ приводят к спектральной последовательности $\lim^p\{H^q\mathscr{B}(T^*(i), G)\} \Rightarrow H^{p+q}\mathscr{B}(\mathrm{colim}^I\{T^*(i)\}, G)$. Так как colim точен справа и переводит проективные объекты в проективные, а его дуализация точна слева и сохраняет свойство инъективности, то существует спектральная последовательность композиции $\mathrm{Ext}^p(\mathrm{colim}_q T, G) \Rightarrow$ $\Rightarrow H^{p+q}(\mathscr{B}(-, G)\circ \mathrm{colim}^I)$ (T^*), сходящаяся к тому же пределу.

2.2. Предложение. *Пусть в абелевой категории* $\mathscr{A}$ *достаточно проективных объектов. Тогда если* $\mathscr{A}$ *допускает* $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$*-суммы, а для всех* c, $c' \in \mathbf{C}$ — $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}/c)$*-суммы и точные* $\mathbf{C}(c, c')$*-суммы, то для любых диаграмм* F, G *из* $\mathbf{C}$ *в* $\mathscr{A}$ *существует спектральная последовательность типа*

$$E_2^{i,j} = \lim\nolimits_{\mathbf{C}'}^{i} \{\mathrm{Ext}^j (Fs(\alpha), Gt(\alpha)\} \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j} (F, G),$$

где s: $\mathbf{C}' \to \mathbf{C}^0$ — *функтор, сопоставляющий морфизму его начало, а* t: $\mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ — *конец.*

Доказательство. Для любых объектов $A \in \mathscr{A}$ и c, $c' \in \mathbf{C}$ существует сумма $\sum_{\mathbf{C}(c',c)} A = \left(\mathrm{Lan}^{c'} A\right)(c)$, если рассматривать $c' \in \mathbf{C}$ как функтор c' : $pt \to \mathbf{C}$ из одноточечной категории. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма. $\mathrm{colim}_n^{\mathbf{C}'^0} \{\mathrm{Lan}^{t(\alpha)} (Fs(\alpha))\} = 0$ $(n \geqslant 1)$.

Доказательство. Пусть $S = S_c$: $\mathbf{C}/c \to \mathbf{C}'^0$ — канонический функтор вложения. Тогда компоненты связности категории S/α изоморфны $\mathbf{C}/s(\alpha)$, при этом каждая компонента связности определяется некоторым (своим) морфизмом $t(\alpha) \to c$. Поэтому имеет место естественный по α изоморфизм $\left(\mathrm{Lan}^S FQ_c\right)(\alpha) \simeq \sum_{\mathbf{C}(t(\alpha),c)} Fs(\alpha) \simeq \left(\mathrm{Lan}^{t(\alpha)} Fs(\alpha)\right)(c)$. Так как $\mathbf{C}(c', c)$-суммы точны, то Lan^S точен, откуда

$$\mathrm{colim}_n^{\mathbf{C}'^0} \{\mathrm{Lan}^S FQ_c\} \simeq \mathrm{colim}_n^{\mathbf{C}/c} FQ_c = 0 \quad (n > 0).$$

Вернемся к доказательству предложения. Имеет место изоморфизм $P\mathscr{A}(F, G) \simeq \lim_{\mathbf{C}'} \{\mathscr{A}(Fs(\alpha), Gt(\alpha))\}$ и $\lim\{P\mathscr{A}(\mathrm{Lan}^{t(\alpha)}Fs(\alpha), G)\} \simeq$ $\simeq P\mathscr{A}(\mathrm{colim}\{\mathrm{Lan}^{t(\alpha)}Fs(\alpha)\}, G)$, где $\mathrm{Lan}^b A(-) = \sum_{\mathbf{C}(b,-)} A$. В силу леммы 2.1 получим две спектральные последовательности $\lim^i\{\mathrm{Ext}^j(\mathrm{Lan}^{t(\alpha)}(F(s(\alpha))), G)\} \Rightarrow H^{i+j}$, $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{colim}_j\{\mathrm{Lan}^{t(\alpha)}(Fs(\alpha))\}, G) \Rightarrow$ $\Rightarrow H^{i+j}$, сходящиеся к одному пределу. Из доказанной выше леммы следует, что этот предел равен $\mathrm{Ext}^*(F, G)$. Второй член первой спектральной последовательности равен $\lim^i\{\mathrm{Ext}^j(Fs(\alpha), Gt(\alpha))\}$, так как

$\mathrm{Lan}_n^{t(\alpha)}=0$ $\forall n>0$ в силу точности $\mathbf{C}(c, c')$-сумм, откуда вытекает доказываемое утверждение.

2.3. Замечание. Предложение 2.2 применим к диаграммам из $\mathbf{C}^0$ в $\mathscr{A}^0$. Таким образом, если в $\mathscr{A}$ достаточно инъективных объектов и $\mathscr{A}$ допускает произведения и точные $\mathbf{C}(c, c')$-произведения, то существует спектральная последовательность предложения 2.2, так как категории $(\mathbf{C}^0)'$ и $\mathbf{C}'$ изоморфны. Ниже будет доказано, что предположение точности сумм или произведений излишне (теорема 2.6).

2.4. Пусть $\mathscr{P}$ — собственный класс в абелевой категории $\mathscr{A}$, а $\mathbf{C}\mathscr{P}$ — класс коротких точных последовательностей в категории диаграмм $\mathbf{C}\mathscr{A}$, покомпонентно принадлежащих $\mathscr{A}$, т. е. естественное преобразование γ: $F\to G$ принадлежит классу $\mathbf{C}\mathscr{P}$-эпиморфизмов, если и только если его значение γ_c: $F(c)\to G(c)$ на любом объекте $c\in\mathbf{C}$ принадлежит классу $\mathscr{P}$-эпиморфизмов.

Определение. *Функтор T: $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ удовлетворяет условию Митчела по отношению к собственным классам $\mathscr{P}$ в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{Q}$ в $\mathscr{B}$*, если $\mathscr{P}\subseteq T^{-1}(\mathscr{Q})$ и для любого $\mathscr{Q}$-эпиморфизма f: $B'\to B$ категории $\mathscr{B}$ и морфизма $T(A)\to B$ категории $\mathscr{B}$ существуют $\mathscr{P}$-эпиморфизм g: $A'\to A$ и морфизм $T(A')\to B'$, делающие коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} T(A') \arrow[r, "T(g)"] \arrow[d] & T(A) \arrow[d] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}.$$

В работе [3] доказано, что если T — полное вложение, удовлетворяющее условию Митчела, то T сохраняет относительные функторы Ext^n.

Пусть $\mathrm{Lex}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^0)$ — категория контравариантных функторов из $\mathscr{A}$ в Ab, точных слева относительно эпиморфизмов класса $\mathscr{P}$. Функтор $\mathscr{A}(A, -)$: $\mathscr{A}\to\mathrm{Ab}$ точен слева для каждого $A\in\mathscr{A}$. Пусть $T(A)=\mathscr{A}(A, -)$. Полное вложение T: $\mathscr{A}\to\mathrm{Lex}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^0)$ переводит относительные Ext^n в абсолютные и удовлетворяет условию Митчела по отношению к классу $\mathscr{P}$ в $\mathscr{A}$ и классу всех эпиморфизмов в $\mathrm{Lex}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^0)$ [3].

Лемма. *Функтор $T\circ(-)$: $\mathbf{C}\mathscr{A}\to\mathbf{C}\mathscr{B}$ переводит* $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{C}\mathscr{P}}$ в Ext^*, *т. е.* $\forall n\geqslant 0$ $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}\mathscr{P}}(F, G)\simeq\mathrm{Ext}^n(T\circ F, T\circ G)$, *если выполнены условия:*

(1) *для каждого $c\in\mathbf{C}$ существуют суммы в $\mathscr{A}$ по множеству $\mathbf{C}/c$ и канонический морфизм π_A: $\sum_{c_0\to c}T\left(A_{c_0}\right)\to T\left(\sum_{c_0\to c}A_{c_0}\right)$ является ретракцией для каждого семейства $\{A_c\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$ категории $\mathscr{A}$,*

(2) *сумма $\mathscr{P}$-эпиморфизмов в $\mathscr{A}$ по множеству $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}/c)$ является $\mathscr{P}$-эпиморфизмом,*

(3) *T — полное вложение и удовлетворяет условию Митчела.*

Доказательство. Достаточно доказать, что функтор $T\circ(-)$ удовлетворяет условию Митчела по отношению к классу $\mathbf{C}\mathscr{P}$ в $\mathbf{C}\mathscr{A}$ и к классу всех эпиморфизмов в $\mathbf{C}\mathscr{B}$. Пусть заданы морфизмы в категории $\mathbf{C}\mathscr{B}$, один из которых (g) — эпиморфизм

$$\begin{tikzcd} & T\circ G \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, two heads, "g"] & Y \end{tikzcd}.$$

Будем строить нужные морфизмы. Пусть O: $\mathbf{C}\mathscr{B}\to\mathrm{Ob}(\mathbf{C})\mathscr{B}$ — функтор, сопоставляющий диаграмме семейство ее объектов. Тогда для эпиморфизма g: $X\to Y$ и любого морфизма x: $TOG\to OY$ категории $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})\mathscr{B}$ существуют семейство $A=\{A_c\}_{c\in\mathbf{C}}$ объектов $A_c\in\mathscr{A}$, семейство $\mathscr{P}$-эпиморфизмов $f=\{f_c$: $A(c)\to G(c)\}$ категории $\mathscr{A}$ и морфизма $TA\to OX$ категории $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})\mathcal{B}$, такие, что коммутативен квадрат

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d] & TOG \arrow[d] \\ OX \arrow[r, two heads, "Og"] & OY \end{tikzcd}.$$

Применим к этой диаграмме функтор L, левый сопряженный к O, и дополним ее морфизмами сопряжения и морфизмом π: $LT \to TL$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} TLA \arrow[rrrd, "TLf"] & & & \\ LTA \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, two heads, "LTf"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#\#"] & LTOG \arrow[r, "\pi_{OG}"] \arrow[d, "Lx"] \arrow[rd, dashed] & & TLOG \arrow[ldd, "Te_G"] \\ LOX \arrow[r, "LOg"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#\#"] & LOY \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#\#"] & LOTG \arrow[l, "LOy"'] \arrow[d] & \\ X \arrow[r, "g"] & Y & TG \arrow[l, "y"'] & \end{tikzcd}$$

где знаком ## обозначены квадраты, коммутативность которых следует из естественности морфизмов e: $LO \to \mathrm{Id}$ и π: $LT \to TL$. Остается еще свобода выбора x. В силу свойства универсальности морфизма сопряжения e_{TG}: $LOTG \to TG$ существует единственный морфизм z: $TOG \to OTG$ такой, что $e_{TG} \circ Lz = Te_G \circ \pi_{OG}$. Положим $x = (Oy) \circ z$. Несложный анализ диаграммы с морфизмом z приводит к коммутативности внешнего 7-угольника. Так как e_G расщепляется на каждом месте, то он $\mathbf{C}\mathcal{P}$-эпиморфизм. По условию Lf — также $\mathbf{C}\mathcal{P}$-эпиморфизм как сумма $\mathcal{P}$-эпиморфизмов на каждом месте. Композиция $e_G \circ Lf$ дает нужный $\mathbf{C}\mathcal{P}$-эпиморфизм. По условию (1) существует сечение s морфизма π_A. Композиция сечения s с морфизмом $LTA \to X$ дает второй морфизм и завершает доказательство.

2.5. Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ — собственный класс в абелевой категории $\mathcal{A}$ и $\forall c \in \mathbf{C}$ $\mathbf{C}/c$ — конечная категория. Тогда для любых диаграмм F, G: $\mathbf{C} \to \mathcal{A}$ существует спектральная последовательность*

$$\lim\nolimits^i_{\mathbf{C}'} \left\{\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{P}}(Fs(\alpha), Gt(\alpha))\right\} \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathbf{C}\mathcal{P}}(F, G),$$

где $\mathbf{C}\mathcal{P}$ — класс коротких точных последовательностей, значения которых принадлежат $\mathcal{P}$.

Доказательство. Применим предложение 2.2 к функторам $T \circ F$ и $T \circ G$, где T: $\mathcal{A} \to \mathrm{Lex}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}^0)$ — полное вложение, описанное выше, в абелеву категорию с произведениями и достаточным числом инъективных объектов. Функтор T перестановочен с конечными суммами. Конечная сумма $\mathcal{P}$-точных последовательностей точна. Поэтому, применяя лемму 2.4, получим необходимый результат.

2.6. Некоторые вычисления членов $E_2^{2,0}$, $E_2^{2,1}$ спектральной последовательности предложения 2.2 были проделаны в работе [6]. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 2.5 $E_2^{n,0} \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}\mathcal{P}}(F, G)$, где $\mathbf{C}\mathcal{P}$ — класс коротких точных последовательностей, расщепляющихся на каждом месте. В данном пункте будет обобщено предложение 2.2 и доказано, что если в $\mathcal{A}$ существуют суммы, то имеет место изоморфизм $\lim^n_{\mathbf{C}'}\{\mathcal{A}(Fs(\alpha), Gt(\alpha))\} \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}\mathcal{P}}(F, G)$ при $n \geqslant 0$.

Теорема. *Если абелева категория $\mathcal{A}$ допускает $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$- и $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}/c)$-суммы для всех $c \in \mathbf{C}$, а класс $\mathcal{P}$ в $\mathcal{A}$ таков, что для всех $c \in \mathbf{C}$ суммы $\mathcal{P}$-эпиморфизмов по множеству $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}/c)$ являются $\mathcal{P}$-эпиморфизмами и существует достаточное число $\mathcal{P}$-проективных объектов в $\mathcal{A}$, то для* *любых диаграмм* $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathscr{A}$ *имеет место спектральная последовательность*

$$E_2^{p,q} = \lim\nolimits^p_{\mathbf{C}'} \left\{\operatorname{Ext}^q_{\mathscr{P}} (Fs(\alpha), Gt(\alpha))\right\} \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}_{\mathbf{C}\mathscr{P}} (F, G).$$

Доказательство. Построим $\mathbf{C}\mathscr{P}$-резольвенту диаграммы $F \in \mathbf{C}\mathscr{A}$ по способу, описанному в [11]. Для этого рассмотрим, как и в п. 2.4, функтор ограничения $O\colon \mathbf{C}\mathscr{A} \to \operatorname{Ob}(\mathbf{C})\mathscr{A}$. Пусть L — левый сопряженный к функтору O. Ясно, что морфизм сопряжения $e_F\colon LOF \to F$ расщепляется на каждом $c \in \mathbf{C}$. Выберем семейство $P = \{P(c)\}_{c\in\mathbf{C}}$ $\mathscr{P}$-проективных объектов и семейство $\xi = \{\xi_c\colon P(c) \to F(c)\}_{c\in\mathbf{C}}$ $\mathscr{P}$-эпиморфизмов и применим функтор L. Тогда $L(\xi)\colon LP \to LOF$ — $\mathscr{P}$-эпиморфизм как сумма $\mathscr{P}$-эпиморфизмов по множеству $\operatorname{Ob}(\mathbf{C}/c)$. Положим $F^0 = LP$. Пусть Ker — ядро морфизма $(e_F \circ L(\xi))\colon F^0 \to F$. Применим к Ker (как к F) описанную конструкцию и положим $F^1 = \operatorname{Ker}^0$. Тогда вложение $\operatorname{Ker} \to F^0$ — это $\mathbf{C}\mathscr{P}$-мономорфизм, поэтому композиция $F^1 \to \operatorname{Ker} \to F^0$ является $\mathbf{C}\mathscr{P}$-морфизмом $d^0\colon F^1 \to F^0$. По индукции строятся члены резольвенты $F^2, F^3, \ldots$ и дифференциалы $d^n\colon F^{n+1} \to F^n$. Рассмотрим теперь комплекс $K^n(\alpha) = \mathscr{A}(F^n(s(\alpha)), G(t(\alpha)))$ в категории $\mathbf{C}'\mathrm{Ab}$. Существуют две спектральные последовательности, сходящиеся к одному и тому же пределу $H^p\left(\lim^q_{\mathbf{C}'}\{K^*(\alpha)\}\right) \Rightarrow H^{p+q}$, $\lim^p_{\mathbf{C}'}\{H^q(K^*(\alpha))\} \Rightarrow H^{p+q}$. Докажем, что $\forall n \geqslant 0$, $\forall q > 0$ $\lim^q_{\mathbf{C}'}\{K^n(\alpha)\} = 0$. Для каждого $n \geqslant 0$ существует $A \in \operatorname{Ob}(\mathbf{C})\mathscr{A}$ такое, что $F^n = LA$. Можно записать: $\lim^q_{\mathbf{C}'}\{K^n(\alpha)\} = \lim^q_{\mathbf{C}'}\{\mathscr{A}(LA(S(\alpha)), G(t(\alpha)))\}$. Рассмотрим диаграммы $L^cA\colon \mathbf{C} \to \mathscr{A}$, полагая $L^cA(-) = \sum_{c\to(-)} A(c)$. Тогда $LA \cong \sum_{c\in\mathbf{C}} L^cA$. Поэтому $\lim^q_{\mathbf{C}'}\{K^n\alpha\} \cong \Pi_{c\in\mathbf{C}} \lim^q_{\mathbf{C}'}\{\mathscr{A}\left(L^cA(s(\alpha)), Gt(\alpha)\right\}$. Зафиксируем $c \in \mathbf{C}$. Пусть $T_c\colon \mathbf{C} \to \mathrm{Ab}$ — диаграмма $T_c(-) = \mathscr{A}(A(c), G(-))$. Тогда $\lim^q_{\mathbf{C}'}\{K^n(\alpha)\} \cong \Pi_{c\in\mathbf{C}} \lim^q_{\mathbf{C}'} \{\Pi_{c\to s(\alpha)} T_c(t(\alpha))\}$. Рассмотрим вложение $S^c\colon c/\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}'$. Тогда компоненты связности кослоев $\alpha/S^c \cong \Pi_{c\to s(\alpha)}(t(\alpha)/\mathbf{C})$ функтора S^c обладают инициальными объектами. Поэтому $\lim^p_{\mathbf{C}'} \operatorname{Ran}_{S^c} \cong \lim^p_{c/\mathbf{C}} = 0$. В частности, для $T_c \circ Q_c\colon c/\mathbf{C} \to \mathrm{Ab}$ имеем $\lim^q_{\mathbf{C}'} \operatorname{Ran}_{S^c} \circ (T_c \circ Q_c) = 0$ при $q \geqslant 1$. При этом $\operatorname{Ran}_{S^c} T_c Q_c(\alpha) = \Pi_{c\to s(\alpha)} T_c(t(\alpha))$. Следовательно, $(\forall q \geqslant 1)$ $\lim^q_{\mathbf{C}'}\{\Pi_{c\to s(\alpha)} T_c t(\alpha)\} = 0$, откуда $\lim^q_{\mathbf{C}'}\{K^n(\alpha)\} = 0$ $(n \geqslant 0)$. Таким образом, получаем $\lim^p_{\mathbf{C}'}\{H^q K^*(\alpha)\} \Rightarrow H^{p+q}(\lim_{\mathbf{C}'} \times \times \{K^*(\alpha)\})$.

Следствие. *Если* $\mathscr{A}$ *допускает* $\operatorname{Ob}(\mathbf{C})$*- и* $\operatorname{Ob}(\mathbf{C}/c)$*-суммы, то для любых* $n \geqslant 0$ *имеет место изоморфизм* $\lim^n_{\mathbf{C}'}\{\mathscr{A}(Fs(\alpha), Gt(\alpha))\} \simeq \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{C}\mathscr{P}}(F, G)$.

2.7. Пусть $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}} \mathscr{A}$ обозначает наибольшее натуральное n, при котором функтор $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{P}}$ не тождественный нуль. Член $E_2^{i,j}$ спектральной последовательности теоремы 2.5 изоморфен $\operatorname{Ext}^i\left(\mathbf{ZC}, \operatorname{EXT}^j_{\mathscr{P}}(F, G)\right)$, где $\mathbf{ZC}$ — функтор $\mathbf{C}^0 \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ab}$, принимающий значения $\mathbf{ZC}(a, b)$ = свободная абелева группа, порожденная множеством морфизмов $\mathbf{C}(a, b)$, а $\operatorname{EXT}^j_{\mathscr{P}}(F, G)(a, b) = \operatorname{Ext}^j_{\mathscr{P}}(F(a), G(b))$. Это следует из работы [6]. Напомним, что dim по определению [4] есть наибольшее число n, при котором функтор $\operatorname{Ext}^n(\mathbf{ZC}, -)$ нетривиален. Теорема 2.5 показывает, что для произвольной абелевой категории $\mathscr{A}$ и категории $\mathbf{C}$ такой, что $\mathbf{C}/c$ конечны, выполняется оценка

$$\operatorname{gl.dim}_{\mathbf{C}\mathscr{P}} \mathbf{C}\mathscr{A} \leqslant \dim(\mathbf{C}) + \operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}} \mathscr{A}.$$

Пусть, например, $\mathbf{C}$ — свободный моноид с образующим x, тогда категория $\mathbf{C}'$ содержит конфинальную полную подкатегорию с множеством объектов $\{1, x\}$ (с морфизмами $(1, x)\colon 1 \to x$, $(x, 1)\colon 1 \to x$, кроме тождественных), поэтому $\mathrm{c.d.}\ \mathbf{C}' = 1$. (Здесь и ниже c. d. обозначает когомологическую размерность). Пусть $\mathbf{C}^n$ — n-кратное произведение $\mathbf{C}$ на себя. Тогда $(\mathbf{C}^n)'$ содержит конфинальную часть, изоморфную n-кратному произведению категории, состоящей из пары параллельных стрелок, на себя, и $\mathrm{c.d.}\,(\mathbf{C}^n)' = n$. В этом случае оценка, приведенная выше, превращается в равенство.

Более общим образом, если $\mathbf{C}$ — малая категория размерности $n = \dim(\mathbf{C})$, у которой n-е целочисленные гомологии $H_n(\mathbf{C})$ нерва изоморфны группе Z целых чисел, то при выполнении условий любой из теорем 2.5, 2.6 имеет место равенство

$$\mathrm{gl.\,dim}_{\mathbf{C}\mathcal{P}}\, \mathbf{C}\mathcal{A} = \dim(\mathbf{C}) + \mathrm{gl.\,dim}_{\mathcal{P}}\, \mathcal{A}.$$

Действительно, пусть $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathcal{P}}\, \mathcal{A} = m$. Тогда существуют объекты $A, B \in \mathcal{A}$ такие, что группа $G = \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{P}}(A, B)$ не равна нулю. По формуле универсальных коэффициентов существует эпиморфизм группы $H^n(N_*\mathbf{C}, G)$ на $\mathrm{Ab}(H_n(N_*\mathbf{C}), G)$. Поэтому $H^n(N_*\mathbf{C}, G)$ не нуль и, следовательно, $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathbf{C}\mathcal{P}}\, \mathbf{C}\mathcal{A} \geqslant n + m$, откуда $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathbf{C}\mathcal{P}}\, \mathbf{C}\mathcal{A} = n + m$.

Пусть $(\mathbf{C}, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество такое, что длина всякой цепи вида $c_0 < c_1 < \ldots < c_m$ не превышает некоторого натурального n. Тогда $\mathrm{c.d.}\,\mathbf{C}' \leqslant n$. Если множества $\mathbf{C}/c$ конечны и геометрическая реализация нерва $N_*\mathbf{C}$ является n-мерным ориентируемым многообразием, то $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathbf{C}\mathcal{P}}\, \mathbf{C}\mathcal{A} = n + \mathrm{gl.\,dim}_{\mathcal{P}}\, \mathcal{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Husainov A. A.* On Ext in diagrams category // Тез. 2-го советско-японского симпозиума «Теория размерности и смежные вопросы». Москва, 1989. (Препринт/ АН СССР. Мат. ин-т им. В. А. Стеклова; № 7).
2. *Husainov A. A.* Cohomology of small categories // Q & A in General Topology. Special Issue. 1990. V. 8. P. 179—184.
3. *Mitchell B.* On the dimension of object and categories // J. Algebra. 1968. V. 9. P. 314—368.
4. *Mitchell B.* Rings with several ebjects // Adv. Math. 1972. V. 8. P. 1—161.
5. *Dwyer W. G., Kan D. M.* Function complexes for diagrams of simplicial sets // Indag. Math. 1983. V. 45. P. 139—147.
6. *Baues H.-J., Wirsching G.* Cohomology of small categories // J. Pure Appl. Algebra. 1985. V. 38. P. 187—211.
7. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Т. 1: Введение в теорию когомологий и производные категории. М.: Наука, 1988.
8. *Габриель П., Цисман М.* Категории частных и теория гомотопий. М.: Мир, 1971.
9. *Oberst U.* Homology of Categories and exactness of direct limits // Math. Z. 1968. Bd 107. S. 89—115.
10. *Хусаинов А. А.* Когомологии малых категорий с коэффициентами в абелевой категории с точными произведениями // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 210—215.
11. *Кузьминов В. И.* Производные функторы проективного предела и классы расширений // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 2. С. 384—396.

г. Новосибирск

Статья поступила
5 июня 1990 г.