А. А. Хусаинов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ

Комсомольск-на-Амуре 2010

Оглавление

Глава 1

Категории множеств со структурой

Рассмотрим категории, объектами которых являются множества со структурой, а морфизмами – отображения, сохраняющие эту структуры. Эти категории рассматриваются в [1], [2], [10], [11].

Поскольку совокупность всех множеств не является множеством, то при рассмотрении множеств и связей между ними появляется необходимость работать с *классами*. В частности, всякое множество является классом.

Если для каждого элемента $A \in \mathscr{C}$ класса $\mathscr{C}$ задано множество $F(A)$, то мы будем говорить, что $\{F(A)\}_{A\in\mathscr{C}}$ является семейством множеств $F(A)$.

1.1 Определение категории

Категорией $\mathscr{C}$ называется тройка $(\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \{\mathscr{C}(A,B)\}_{A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}}, \circ)$, состоящая из

- класса $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, элементы которого называются *объектами*,
- семейства попарно непересекающихся множеств $\{\mathscr{C}(A,B)\}_{A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}}$, элементы которых $f \in \mathscr{C}(A,B)$ называются *морфизмами из* A *в* B и обозначаются через $A \xrightarrow{f} B$,
- и семейства отображений $\circ : \mathscr{C}(A,B)\times\mathscr{C}(B,C) \to \mathscr{C}(A,C)$, определенных для каждой упорядоченной тройки объектов $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ значения которых на $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ называются *композицией* $A \xrightarrow{g\circ f} B$.

При этом композиция должна удовлетворять для любых объектов A, B, C, D и морфизмов $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $C \xrightarrow{h} D$ закону ассоциативности:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

и для каждого объекта A должен существовать морфизм $A \xrightarrow{1_A} A$, удовлетворяющий для любых морфизмов $A \xrightarrow{f} B$ и $C \xrightarrow{g} A$ равенствам

$$f \circ 1_A = f \ , \quad 1_A \circ g = g \ .$$

Упражнение 1.1 *Доказать, что для каждого $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ морфизм 1_A, удовлетворяющий этим условиям, является единственным.*

Морфизм 1_A называется *тождественным* морфизмом объекта A.

Элементы класса $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C} = \bigcup\limits_{A\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, B\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \mathscr{C}(A,B)$ называются *морфизмами категории $\mathscr{C}$.*

Упражнение 1.2 *Например, категорию составляет класс всех множеств, семейство множеств $\mathrm{Set}\,(A,B)$, каждое из которых состоит из отображений $A \to B$, и обычная композиция, сопоставляющая каждой паре отображений $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ отображение $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Эта категория обозначается через Set и называется категорией множеств и отображений.*

Данная часть посвящена категориям, в которых объектами являются множества со структурой, морфизмами – отображения этих множеств, “уважающих” эту структуру, а композиция определяется по формуле $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.

Под *классом объектов и морфизмов заданного типа* мы будем подразумевать некотороый класс K объектов вместе с семейством множеств $\{E_{A,B}\}_{(A,B)\in K}$, каждое из которых состоит из морфизмов заданного типа.

Для того, чтобы доказать, что множества с заданной структурой вместе с заданным классом отображений составляют категорию, достаточно установить выполнение следующих условий:

- Если g и f принадлежат классу K, то $g \circ f$ принадлежит классу K.
- Тождественные отображения принадлежат классу K.

Упражнение 1.3 *Будет ли категорией класс всех пунктированных множеств и отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную?*

Упражнение 1.4 *Будет ли категорией*

1. *класс частично упорядоченных множеств и неубывающих отображений*
2. *класс частично упорядоченных множеств и убывающих отображений*
3. *класс частично упорядоченных множеств и возрастающих отображений*
4. *класс частично упорядоченных множеств и невозрастающих отображений*

1.2 Категория моноидов

Полугруппой называется пара $(M, \cdot)$, состоящая из множества M и отображения $\cdot : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, определенного для всех $x, y \in M$ и удовлетворяющего закону ассоциативности

$$(\forall x, y, z \in M)\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

В некоторых случаях символ операции $'\cdot'$ мы будем опускать.

Отображение между полугруппами $f : M \to M'$ называется *сохраняющим операцию*, если $(\forall x_1, x_2 \in M)\ f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Упражнение 1.5 *Будет ли класс всех полугрупп и сохраняющих операцию отображений категорией?*

Элемент $1 \in M$ называется *нейтральным*, если

$$(\forall x \in M) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x\ .$$

Если 1 и $1'$ – любые два нейтральных элемента, то из $1' \cdot x = x$ следует, что $1' \cdot 1 = 1$, а из $x \cdot 1 = x$ вытекает $1' \cdot 1 = 1'$. Следовательно, нейтральные элементы равны между собой.

Полугруппа $(M, \cdot)$ называется *моноидом*, если она обладает нейтральным элементом. Для того, чтобы указать нейтральный элемент моноида, мы иногда будем описывать моноид как тройку $(M, \cdot, 1)$. Например, для произвольного множества X тройка $(P(X), \cap, X)$, состоящая из множества всех подмножеств множества X с операцией пересечения будет моноидом.

Упражнение 1.6 *Будет ли категорией класс всех моноидов и отображений, сохраняющих операцию?*

Упражнение 1.7 *Будет ли сохраняющее операцию отображение моноидов переводить нейтральный элемент в нейтральный?*

Контрпример. Для подмножества $A \subset X$ рассмотрим отображение $f : P(X) \to P(X)$ множества подмножеств в себя, $f(S) = S \cap A$. Оно будет гомоморфизмом полугрупп $(P(X), \cap) \to (P(X), \cap)$. Но оно отображает единицу X моноида $P(X)$ не в единицу, а в элемент $A \in P(X)$. Следовательно, ответ отрицательный.

Отображение моноидов $f : M \to M'$ называется *гомоморфизмом моноидов*, если оно сохраняет операцию и переводит нейтральный элемент в нейтральный.

Упражнение 1.8 *Доказать, что класс моноидов и их гомоморфизмов является категорией.*

1.3 Категория групп

1.3.1 Определение группы

Моноид $(M, \cdot)$ называется *группой*, если для каждого $x \in M$ найдется такой $x' \in M$, что $x \cdot x' = 1$.

Упражнение 1.9 *Доказать, что элемент, обладающий этим свойством, является единственным.*

Решение. $x'' = x'xx'' = x'$.

Упражнение 1.10 *Доказать, что множество $n \times n$-матриц с ненулевым определителем является группой.*

Упражнение 1.11 *Будет ли сохраняющее операцию отображение $f : G \to G'$ между группами переводить нейтральный элемент в нейтральный и обратный — в обратный.*

Решение. $f(1)f(1) = f(1) \Rightarrow f(1)f(1) = f(1) \cdot 1 \Rightarrow f(1)^{-1}f(1)f(1) = f(1)^{-1}f(1) \cdot 1 \Rightarrow f(1) = 1$. $f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(1) = 1$.

1.3.2 Гомоморфизмы групп

Отображение групп $f : G \to G'$ называется гомоморфизмом, если для всех $x_1, x_2 \in G$ имеет место $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

Упражнение 1.12 *Доказать, что класс всех групп и гомоморфизмов является категорией.*

1.3.3 Подгруппы и фактор-группы

Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой, если для всех ее элементов $x, y \in G$ выполнены условия

1. $1 \in H$
2. $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$
3. $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Упражнение 1.13 *Пусть G – группа, а $H \subseteq G$ – её подгруппа. Доказать, что отношение $R = \{(x, y) : x^{-1}y \in H\}$ является отношением эквивалентности на G. Доказать, что классы эквивалентности состоят из множеств $gH = \{gh : h \in H\}$*

Решение: $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1}$ ибо $y^{-1}x(x^{-1}y) = 1$, отсюда следует симметричность $x^{-1}y \in H \Rightarrow (x^{-1}y)^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1}x \in H$. Рефлексивность и транзитивность очевидны.

Для произвольного $g \in G$ опишем класс эквивалентности, содержащий g. Если x эквивалентен g, то $g^{-1}x \in H$, и значит $x \in gH$. Наоборот, если $x \in gH$, то $g^{-1}x \in g^{-1}gH = H$.

Определение 1.3.1 *Эти классы эквивалентности называются левыми классами смежности по подгруппе H. Классы Hg называются правыми классами смежности.*

Подгруппа $H \subseteq G$ называется нормальной, если $(\forall g \in G)\ g^{-1}Hg \subseteq H$.

Упражнение 1.14 *Будет ли всегда в этом случае $g^{-1}Hg = H$?*

Решение. $g = (g^{-1})^{-1} \Rightarrow gHg^{-1} \subseteq H \Rightarrow H \subseteq g^{-1}Hg$.

Упражнение 1.15 *Пусть $f : G \to G'$ – гомоморфизм групп. Доказать, что подмножество $f^{-1}(1) =_{def} \{g \in G : f(g) = 1\}$ будет нормальным делителем.*

Решение. $f(g_1) = 1$ и $f(g_2) = 1 \Rightarrow f(g_1^{-1}g_2) = 1$. Значит, $f^{-1}(1)$ – подгруппа. $f(h) = 1 \Rightarrow f(g^{-1}hg) = 1$, стало быть эта подгруппа нормальна.

Прообраз $f^{-1}1$ нейтрального элемента группы называется *ядром* и обозначается $\operatorname{Ker} f$.

Пусть $H \subseteq G$ – подгруппа. Разобьем группу G на левые классы смежности по H.

Упражнение 1.16 *Определим произведение классов смежности по формуле $gH \cdot fH = \{xy : x \in gH \& y \in fH\}$. Доказать, что произведение любых двух классов смежности будет классом смежности тогда и только тогда, когда H будет нормальной.*

Если H нормальна, то $gHfH = gfHH = gfH$. Наоборот, $gHfH = tH$ влечет $t^{-1}gHfH = H$, откуда $t^{-1}gf \in H$ и $gfH = tH$. Получаем $gHfH = gfH$. При $g = 1$ будем иметь $HfH \subseteq fH$, и вместе с тем $Hf \subseteq fH$. Получаем $f^{-1}Hf \subseteq H$.

Упражнение 1.17 *Если H нормальна в G, то классы составляют группу.*

Упражнение 1.18 *Первая теорема об изоморфизме. Пусть $f : G \to G'$ – сюръективный гомоморфизм групп. Тогда $G' \cong G/\operatorname{Ker} f$.*

Упражнение 1.19 *Доказать, что подмножество $H \subseteq G$ будет подгруппой тогда и только тогда, когда верна импликация $x, y \in H \Rightarrow x^{-1}y \in H$.*

Упражнение 1.20 *Описать все подгруппы аддитивной группы целых чисел.*

Решение. Пусть $H \subset \mathbb{Z}$ – ненулевая подгруппа. Возьмем наименьший положительный элемент $n \in H$. Для произвольного положительного $m \in H$ существуют такие неотрицательные $p, q \in \mathbb{Z}$, что $m = pn + q$ и $0 \leq q < n$. Получим $q \in H$, значит $q = 0$. Следовательно всякий положительный элемент из H делится на n. Отсюда вытекает, что все элементы из H кратны n.

Упражнение 1.21 *Описать все подгруппы аддитивной группы перестановок трех элементов. Какие из них нормальны?*

Упражнение 1.22 *Вторая теорема об изоморфизме. Для цепочки подгрупп $N \subset H \subset G$ таких, что N и H – нормальные делители группы G имеет место изоморфизм $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.*

Упражнение 1.23 *Третья теорема об изоморфизме. Для нормального делителя $H \subset G$ и подгруппы $A \subseteq G$ имеет место изоморфизм $AH/H \cong A/A \cap H$.*

1.3.4 Подкатегории и надкатегории категории групп

Рассмотрим категории, содержащие категорию групп и содержащиеся в категории групп.

Пусть $\mathscr{C}$ – категория. Категория $\mathscr{D}$ называется *подкатегорией* категории $\mathscr{C}$, если $\mathrm{Ob}\,\mathscr{D} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}(D_1, D_2) \subseteq \mathscr{C}(D_1, D_2)$ для любых $D_1, D_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$.

Например, имеет место цепь подкатегорий

$$Grp \subset Mon \subset SGrp\ ,$$

где Grp – категория групп и гомоморфизмов, Mon – категория моноидов и отображений, сохраняющих операцию и нейтральный элемент, $SGrp$ – категория полугрупп и сохраняющих операцию отображений.

Подкатегория $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ называется *полной подкатегорией*, если $\mathscr{D}(D_1, D_2) = \mathscr{C}(D_1, D_2)$ для любых $D_1, D_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$.

Упражнение 1.24 *В частности $Grp \subset SGrp$ – полная подкатегория, а $Mon \subset SGrp$ – не будет полной подкатегорией.*

Рассмотрим подкатегории категории групп

$$Mat \subset FAb \subset \mathrm{Ab} \subseteq Grp\ ,$$

где

- Объектами Mat служат абелевы группы $\mathbb{Z}^n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, морфизмы $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ задаются $m \times n$-матрицами $(a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$
- FAb – категория абелевых групп без кручения
- Ab – категория абелевых групп и гомоморфизмов

Упражнение 1.25 *Доказать, что все эти категории являются полными подкатегориями категории абелевых групп.*

Упражнение 1.26 *Пусть $\mathscr{D}_1 \subseteq \mathscr{C}$ и $\mathscr{D}_2 \subseteq \mathscr{C}$ – полные докатегории, и $\mathscr{D}_1 \subseteq \mathscr{D}_2$ – подкатегория. Будет ли $\mathscr{D}_1$ полной подкатегорией категории $\mathscr{D}_2$?*

1.4 Категории множеств с бинарным отношением

Рассмотрим цепь подкатегорий

$$\Delta \subset Totord \subset Ord \subset Preord \subset Rel \subset Graph$$

- Объектами Δ служат конечные линейно упорядоченные множества $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$ и неубывающие отображения $[m] \to [n]$
- $Totord$ – категория линейно упорядоченных множеств и неубывающих отображений
- Ord – категория частично упорядоченных множеств и неубывающих отображений
- $Preord$ – категория предупорядоченных множеств и неубывающих отображений
- Rel – категория множеств с бинарным отношением и отображений $f : (X, R) \to (X', R')$, сохраняющих отношение, $(x, y) \in R \Rightarrow (f(x), f(y)) \in R'$
- $Graph$ – категория ориентированных графов $A \stackrel{(s,t)}{\to} X \times X$ и морфизмов, состоящих из пар отображений $f : X \to X'$ и $g : A \to A'$, делающих коомутативными диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "(s,t)"] \arrow[d, "g"] & X \times X \arrow[d, "f \times f"] \\ A' \arrow[r, "(s',t')"] & X' \times X' \end{tikzcd}$$

Бинарное отношение определяется как вложение $R \subseteq X \times X$, а морфизм – как отображение $f : X \to X'$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "g"] & X \times X \arrow[d, "f \times f"] \\ R' \arrow[r, "\subseteq"] & X' \times X' \end{tikzcd}$$

в которой $g(x, y) = (f(x), f(y))$ для всех $(x, y) \in R$. Это позволяет рассматривать Rel как подкатегорию из $Graph$.

Упражнение 1.27 *Будет ли эта подкатегория полной? (Ответ: Да)*

Упражнение 1.28 *Какие из подкатегорий будут полными?*

1.5 Категории топологических пространств

Расмотрим цепь категорий топологических пространств

$$Metr_c \subset Metr_1 \subset Metr_L \subset Metr_u \subset Metr \subset Haus \subset Top$$

- $Metr_c$ – категория метрических пространств и сжимающих отображений
- $Metr_1$ – категория метрических пространств и отображений $f : (M, d) \to (M', d')$ удовлетворяющих $(\forall x, y \in M) d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$
- $Metr_L$ – категория метрических пространств и отображений $f : (M, d) \to (M', d')$, для каждого из которых существует константа $C > 0$ такая, что $(\forall x, y \in M) d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$
- $Metr_u$ – категория метрических пространств и равномерно непрерывных отображений
- $Haus$ – категория хаусдорфовых пространств и непрерывных отображений
- Top – категория всех топологических пространств и непрерывных отображений

Упражнение 1.29 *Доказать, что эта последовательность классов топологических пространств и различных классов отображений состоит из подкатегорий. Какие из подкатегорий будут полными?*

Глава 2

Категории, функторы и естественные преобразования

Рассматривая модель как объект некоторой категории, мы отвлекаемся от ее элементов. В общем случае объекты категории могут не иметь элементов. Тем не менее, как будет показано в данной главе, морфизмы в произвольной категории можно рассматривать как семейства отображений.

2.1 Направленные графы и категории

В первой главе мы рассматривали категории, объекты которых являются множествами со структурой. В данной части мы определяем категорию как ориентированный граф с законом композиции для стрелок. Вершины этого графа - неделимые объекты.

(Ориентированным) графом Γ называется пара классов A, V, и пара отображений $cod, dom : A \to V$. Элементы из A называются *стрелками*, а элементы из V – ***вершинами*** графа. Если A и V – конечные множества, то граф можно нарисовать на плоскости, изображая стрелки с помощью направленных криволинейных отрезков, а вершины – точками. Например, рисунок

$$a \xrightarrow{\alpha} b \xleftarrow{\beta} c$$

задает граф, определенный парой множеств и парой отображений

$$A = \{\alpha, \beta\} \overset{\to}{\underset{\to}{}} \{a, b, c\} = V,$$

где $dom\alpha = a$, $dom\beta = c$, $cod\alpha = cod\beta = b$.

Для произвольных графа Γ и его вершин a, b обозначим через $\Gamma(a, b)$ класс $\{\alpha \in A : dom\alpha = a, cod\alpha = b\}$. Пусть $A \times_V A = \{(\alpha, \beta) \in A \times A : dom\alpha = cod\beta\}$.

Упражнение 2.1 *Каждой категории соответствует ориентированный граф*

$$Mor\mathscr{C} \underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} Ob\mathscr{C},$$

где $Mor\mathscr{C} = \bigcup\limits_{(a,b)\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\times \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \mathscr{C}(a,b)$, *и для стрелок* $\alpha \in \mathscr{C}(a,b)$ *начало и конец определены по формулам* $dom(\alpha) = a$, $cod(\alpha) = b$. *Для этого графа заданы отображения* $1_{(-)} : Ob\mathscr{C} \to Mor\mathscr{C}$ *и* $(-)\circ(=) : Mor\mathscr{C} \times_{Ob\mathscr{C}} Mor\mathscr{C} \longrightarrow Mor\mathscr{C}$, *удовлетворяющие следующим соотношениям*

$$cod(\alpha\circ\beta) = cod(\alpha), \quad dom(\alpha\circ\beta) = dom(\beta), \text{ при } dom(\alpha) = cod(\beta);$$
$$1_a\circ\alpha = \alpha\circ 1_b = \alpha, \text{ для всех } \alpha\in\mathscr{C}(a,b);$$
$$(\alpha\circ\beta)\circ\gamma = \alpha\circ(\beta\circ\gamma), \text{ если } dom\alpha = cod\beta \text{ и } dom\beta = cod\gamma.$$

Наоборот, всякому ориентированному графу с этими свойствами соответствует категория. Это позволяет дать равносильное определение категории.

Упражнение 2.2 *Частичным отображением* $f : A \to B$ *называется четверка, состоящая из тройки множеств* A, B, $D \subseteq A$ *и определенной на* D *функции* $f : D \to B$. *Композиция* $f\circ g$ *для частичных отображений является частичным отображением, определенным для* x, *принадлежащим области определения* g, *для которых* $g(x)$ *принадлежат области определения* f. *Рассмотрим категорию, объектами которой являются множества, а морфизмами – частичные отображения. Добавляя к каждому множеству отмеченную ("бесконечно удаленную") точку и доопределяя отображения до переводящих точки неопределенности в отмеченную точку, получаем, что категорию множеств и частичных отображений можно рассматривать как категорию множеств с отмеченной точкой, морфизмами между которыми являются отображения, определенные на всех элементах и переводящих отмеченную точку в отмеченную.*

Категория $\mathscr{C}$ называется *малой*, если класс $Ob\mathscr{C}$ является множеством.

Упражнение 2.3 *Пусть* M *– моноид. Рассмотрим* M *как категорию, имеющую единственный объект* M, *морфизмами в которой являются элементы моноида. Таким образом* $MorM = M$. *Закон композиции определен операцией умножения элементов моноида. Морфизм* 1_M *определим как нейтральный элемент моноида* M. *Легко видеть, что аксиомы категории выполнены.*

Упражнение 2.4 *Пусть* $(X,\leq)$ *– предупорядоченное множество. Его можно рассматривать как категорию* X, *имеющей множество морфизмов* $MorX = \{(x,y) : x \leq y\}$ *и множество объектов* $ObX = X$. *Отображение* $1_{(-)}$ *определяется значениями* $1_x = (x,x)$, *композиция действует по формуле* $(y,z)\circ(x,y) = (x,z)$. *Легко видеть, что предупорядоченное множество можно определить как малую категорию* $\mathscr{C}$, *у которой для любой пары объектов* a, b *множество* $\mathscr{C}(a,b)$ *состоит не более, чем из одного элемента.*

Пусть $\mathscr{C}$ – категория. *Двойственной* (или *дуальной*) категорией $\mathscr{C}^{op}$ называется категория, имеющая класс объектов $Ob\mathscr{C}^{op} = Ob\mathscr{C}$, класс морфизмов $Mor\mathscr{C}^{op} = Mor\mathscr{C}$ у которых начала и концы меняются ролями - $cod^{op}(\alpha) = dom(\alpha)$, $dom^{op}(\alpha) = cod(\alpha)$. Композиция $\alpha \circ \beta$ в $\mathscr{C}^{op}$ определяется как композиция $\beta \circ \alpha$ в категории $\mathscr{C}$.

2.2 Функторы

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – категории. *Функтором* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется отображение классов $F : Ob\mathcal{A} \to Ob\mathcal{B}$ и семейство отображений множеств $F = F_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A'))$, такие что

$$F(\alpha \circ \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta),$$

для всех $\alpha, \beta \in Mor\mathcal{A}$, удовлетворяющих соотношению $dom\alpha = cod\beta$; и

$$F(1_A) = 1_{F(A)},$$

для всех $A \in Ob\mathcal{A}$.

Пример 2.2.1 *Пусть I – направленное множество. Его можно рассматривать как малую категорию I. Функтор $F : I^{op} \to \mathrm{Set}$ будет в точности семейством множеств $F(i)$ и отображений $F(i \geq j) : F(i) \to F(j)$, удовлетворяющих $F(j \geq k) \circ F(i \geq j) = F(i \geq k)$ для всех $i \geq j \geq k$. Следовательно, каждый обратный спектр $(\{A_i\}_{i \in I}, \rho)$ над направленным множеством можно рассматривать как функтор $F : I^{op} \to \mathrm{Set}$, принимающий значения $F(i) = A_i$ на объектах и $F(i \geq j) = \rho^i_j$ – на морфизмах.*

Пример 2.2.2 *Пусть $\mathcal{A}$ – категория множеств, наделенных структурой, и отображений, сохраняющих эту структуру. Тогда определен функтор, сопоставляющий каждому объекту этой категории его множество, а каждому морфизму – задающее этот морфизм отображение. Этот функтор называется забывающим. Например, забывающий функтор $U : Grp \to \mathrm{Set}$ ставит в соответствие каждой группе G множество G, а каждому гомоморфизму $f : G_1 \to G_2$ – отображение f.*

2.3 Специальные классы объектов и морфизмов

Морфизм $\alpha : a \to b$ в категории $\mathscr{C}$ называется *изоморфизмом* если существует такой морфизм $\beta : b \to a$, что имеют место равенства $\beta \circ \alpha = 1_a$ и $\alpha \circ \beta = 1_b$. Мы будем писать $a \cong b$, если существует изоморфизм $a \to b$.

Пример 2.3.1 *В случае $\mathscr{C} = \mathrm{Set}$ морфизм α будет изоморфизмом, если и только если он является биекцией. В категории $\mathscr{C} = Top$ топологических пространств и непрерывных отображений существуют непрерывные отображения, которые биективны, но не являются изоморфизмами. Изоморфизмы в Top называются гомеоморфизмами.*

Упражнение 2.5 *Доказать, что композиция изоморфизмов является изоморфизмом.*

Упражнение 2.6 *Привести пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом.*

Объект $e \in \mathscr{C}$ называется *инициальным* (соотв. *терминальным*), если для каждого $c \in Ob\mathscr{C}$ множество $\mathscr{C}(e,c)$ (соотв. $\mathscr{C}(c,e)$) содержит в точности один элемент.

Пример 2.3.2 *Если $\mathscr{C} = \mathrm{Set}$ или $\mathscr{C} = Top$, то инициальный объект в $\mathscr{C}$ является пустым множеством (или пустым топологическим пространством). Каждый терминальный объект состоит из одной точки.*

Предложение 2.3.1 *Если a и b – инициальные (или терминальные) объекты, то $a \cong b$.*

Определение 2.3.3 *Морфизм $\alpha : a \to b$ называется эпиморфизмом, если для любых объекта $c \in Ob\mathscr{C}$ и морфизмов $\beta, \gamma : b \to c$ в случае равенства $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & C \end{tikzcd}$$

будет иметь место $\beta = \gamma$. Иными словами, эпиморфизмами будут морфизмы, на которые можно сокращать справа.

Упражнение 2.7 *Доказать, что композиция эпиморофизмов является эпиморфизмом.*

Упражнение 2.8 *Предположим, что композиция двух морфизмов*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta\circ\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & C \end{tikzcd}$$

- эпиморфизм. Доказать, что в этом случае β будет эпиморфизмом. Должен ли быть в этом случае α эпиморфизмом?

Определение 2.3.4 *Мономорфизмом называется эпиморфизм в двойственной категории $\mathscr{C}^{op}$.*

Упражнение 2.9 *Морфизм $\alpha : A \to B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда из равенства композиций*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

$\alpha\beta = \alpha\gamma$ следует равенство морфизмов $\beta = \gamma$. Иными словами, мономорфизмами являются морфизмы, на которые можно сокращать слева.

Если $\alpha \circ \beta = 1_b$, то α называется *ретракцией*, а β – *коретракцией*.

Очевидно, что функторы переводят ретракции в ретракции.

Упражнение 2.10 *Пользуясь тем, что существует ретракция групп подстановок $S_3 \to S_2$, доказать, что не существует функтора $Grp \to Grp$, сопоставляющего каждой группе G ее центр $Z(G)$.*

Предложение 2.3.2 *Если α – ретракция и мономорфизм, то α – изоморфизм. Аналогичное верно для коретракции и эпиморфизма.*

В категориях Set, Grp, Ab, Mod_R эпиморфизмы – сюръективные морфизмы, мономорфизмы – инъективные. В Top мономорфизмами являются инъективные непрерывные отображения.

Существуют примеры не сюръективных эпиморфизмов. Эти примеры показывают, что для того, чтобы морфизм был изоморфизмом, ему недостаточно быть эпиморфизмом и мономорфизмом:

Пример 2.3.5 *Пусть Mon – категория всех моноидов, $\mathbb{N}$ – аддитивный моноид неотрицательных целых чисел, $\mathbb{Z}$ – моноид всех целых чисел, $inc : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ – каноническое вложение. Тогда для любых моноида M и гомоморфизма моноидов $f : \mathbb{Z} \to M$ будет иметь место равенство $f(n) + f(-n) = 0$, для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значит, поскольку в случае выполнения $f(n) = g(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ будет верно $f(n)+f(-n) = g(n)+g(-n) = f(n)+g(-n)$, то, прибавляя слева к частям последних равенств $f(-n)$, получим $f(-n) = g(-n)$. Следовательно, $f \circ inc = g \circ inc$ влечет равенство $f = g$, откуда inc – эпиморфизм. Ясно, что он является и мономорфизмом, не будучи изоморфизмом.*

Пример 2.3.6 *Вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ метрического пространства рациональных чисел в пространство действительных чисел является эпиморфизмом и мономорфизмом, но не изоморфизмом в категории метрических пространств и непрерывных отображений.*

Пример 2.3.7 *Пусть $TopAb$ – категория топологических хаусдорфовых абелевых групп и непрерывных гомоморфизмов. Вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ подгруппы рациональных чисел в группу действительных чисел является эпиморфизмом, ибо для любых объекта A и морфизма $f : \mathbb{Q} \to A$ существует единственное продолжение $\mathbb{R} \to A$ равное на $\mathbb{Q}$ отображению f. Но вложение не сюръективно. Поскольку инъекция будет также мономорфизмом, то это вложение является эпиморфизмом и мономорфизмом, но не изоморфизмом.*

Введем понятие, обобщающее определения подмножеств, подгрупп и подпространств. В этих определениях подобъект задается с помощью канонического мономорфизма. Поскольку в общем случае канонического мономорфизма может не быть, то определим его как класс эквивалентных мономорфизмов. Будем говорить, что мономорфизм $f : B \to A$ делится на мономорфизм $g : C \to A$, если существует такой $h : B \to C$, что $f = g \circ h$.

В этом случае h – мономорфизм. Легко видеть, что отношение делимости будет отношением предпорядка на классе всех мономорфизмов в A, если игнорировать тот факт, что этот класс может не быть множеством. Будем считать морфизмы f и g эквивалентными, если f делится на g и g делится на f. Всякий морфизм, связывающий эквивалентные мономорфизмы, будет изоморфизмом, отсюда области определения эквивалентных мономорфизмов изоморфны. Классы эквивалентных мономорфизмов с кообластью A называются *подобъектами* объекта A. Класс всех подобъектов объекта A частично упорядочен отношением делимости и обозначается через $Sub(A)$. Двойственно определяются *факторобъекты* объекта A. Они будут задаваться эпиморфизмами $f : A \to B$, определяемыми эквивалентными $f \cong g$, если существуют такие h_1 и h_2, что $h_1 \circ f = g$ и $h_2 \circ g = f$.

2.4 Естественные преобразования

Дадим определение естественного преобразования. Пусть $F, G : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ – функторы. *естественным преобразованием* $\eta : F \to G$ называется семейство морфизмов $\eta_c : F(c) \to G(c)$, $c \in Ob\mathscr{C}$, таких что для каждого морфизма $\alpha : a \to b$ of $\mathscr{C}$ коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\eta_a} & G(a) \\ \downarrow F(\alpha) & & \downarrow G(\alpha) \\ F(b) & \xrightarrow{\eta_b} & G(b) \end{array} \tag{2.1}$$

Пример 2.4.1 *Пусть Fld – категория полей и гомоморфизмов, $n \geq 1$ – положительное целое число, $Gl_n : Fld \to Grp$ – функтор, сопоставляющий каждому полю K общую линейную группу $Gl_n(K)$ обратимых $n \times n$-матриц над полем K. Пусть $(-)^*$ – функтор, сопоставляющий полю мультипликативную группу K^* этого поля. Тогда $Det : Gl_n(-) \to (-)^*$ будет естественным преобразованием.*

Для любых функторов F, G и H из малой категории $\mathscr{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{A}$ и естественных преобразований $\eta : F \to G$, $\sigma : G \to H$ определим композицию $\sigma\eta$, полагая $(\sigma\eta)_c = \sigma_c \circ \eta_c$ для всех $c \in Ob\mathscr{C}$. Тождественное естественное преобразование $1_F : F \to F$ определим как семейство $\{1_{Fc}\}_{c \in Ob\mathscr{C}}$, состоящее из тождественных морфизмов. Получим категорию $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$, объектами которой являются функторы $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$, а морфизмами – естественные преобразования.

Предложение 2.4.1 *Пусть $\eta : F \to G$ – естественное преобразование функторов $F, G : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$. Тогда η является изоморфизмом $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ тогда и только тогда, когда все морфизмы $\eta_c : F(c) \to G(c)$ являются изоморфизмами в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Для всех морфизмов $\alpha : a \to b$ категории $\mathscr{C}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\eta_a} & G(a) \\ \downarrow F(\alpha) & & \downarrow G(\alpha) \\ F(b) & \xrightarrow{\eta_b} & G(b) \end{array} \tag{2.2}$$

Поскольку η_a – изоморфизмы, то существует семейство морфизмов σ_a, где $a \in Mor\mathscr{C}$, таких что $\sigma_a \circ \eta_a = 1_{Fa}$ и $\eta_a \circ \sigma_a = 1_{Ga}$. Докажем естественность семейства σ_a. Из коммутативности квадрата вытекает, что $\eta_b F(\alpha)\sigma_a = G(\alpha)\eta_a\sigma_a = G(\alpha)$. Умножая полученное равенство слева на σ_b, получаем $\sigma_b\eta_b F(\alpha)\sigma_a = \sigma_b G(\alpha)$. В силу $\sigma_b\eta_b = 1_{Fb}$ отсюда получаем равенство $F(\alpha)\sigma_a = \sigma_b G(\alpha)$, откуда следует, что семейство σ_a является естественным преобразованиям. Поскольку выполнены соотношения $\sigma\eta = 1_F$ и $\eta\sigma = 1_G$, то η – изоморфизм.

Существует естественное преобразование, которое не является ретракцией, хотя все его компоненты – ретракции.

2.5 Представимые функторы

2.5.1 Функторы морфизмов

Пусть $\mathscr{C}$ – категория, $A \in Ob\mathscr{C}$ – ее объект. Обозначим через h^A – пара отображений, первое из которых действует на объектах категории $\mathscr{C}$ как

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \ni B \mapsto \mathscr{C}(A, B)\ ,$$

А второе на морфизмах категории $\mathscr{C}$, по формуле:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\beta"] & h^A(B) = \mathscr{C}(A,B) \arrow[d] & \ni \alpha \arrow[d, mapsto] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta\circ\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C & h^A(C) = \mathscr{C}(A,C) & \ni \beta\circ\alpha & & C \end{tikzcd}$$

Предложение 2.5.1 *h^A – функтор $\mathscr{C} \to \mathrm{Set}$*

Этот функтор называется функтором морфизмов.

Контравариантный функтор $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ можно рассматривать как пару отображений

$$Ob\mathscr{C} \to Ob\mathscr{D},\ A \mapsto F(A)$$

$$Mor\mathscr{C} \to Mor\mathscr{D},\ (A \xrightarrow{\alpha} B) \mapsto (F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A))$$

таких, что

- $(\forall A \in Ob(\mathscr{C}))\ F(1_A) = 1_F(A)$
- $F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$, для любых $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$

Положим $h_A(B) = \mathscr{C}(B, A)$. Для $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\alpha} A$ определим $h_A(\alpha)(\beta)$.

Предложение 2.5.2 *h_A – функтор $\mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}$*

Этот функтор называется *контравариантным функтором морфизмов.*

2.5.2 Представимые функторы и их свойства

Функтор $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ называется представимым, если он изоморфен для некоторого $A \in Ob\mathscr{C}$ функтору h^A. Соответственно контравариантный функтор представим, если он изоморфен h_A. Докажем, что представимый функтор переводит мономорфизмы в инъекции.

Лемма 2.5.3 *Функтор морфизмов $h^A : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ переводит мономорфизмы в инъекции.*

Доказательство.
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] & C \\ & A \arrow[ul, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad \alpha \overset{h^A(\beta)}{\mapsto} \beta \circ \alpha$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \beta \circ \alpha_1 \neq \beta \circ \alpha_2 \Rightarrow h^A(\beta)(\alpha_1) \neq h^A(\beta)(\alpha_2)$$

Лемма 2.5.4 *Если β – эпиморфизм, то $h_A(\beta)$ – инъекция.*

Предложение 2.5.5 *Всякий представимый функтор $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ переводит мономорфизмы в инъекции. Контравариантный представимый функтор $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ переводит эпиморфизмы в инъекции.*

Доказательство. Пусть существует изоморфизм $\eta : h^C \to F$. Тогда для любого $A \xrightarrow{\alpha} B$ коммутативен квадрат из диаграммы
$$\begin{tikzcd} h^C(A) \arrow[r, "\eta_A", "\cong"'] \arrow[d, "h^C(\alpha)"] & F(A) \arrow[d, "F(\alpha)"] & E \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[l, bend left, "g"] \\ h^C(B) \arrow[r, "\eta_B", "\cong"'] & F(B) & \end{tikzcd}$$

Если α – мономорфизм, то $h^C(\alpha)$ – инъекция. В категории множеств всякий мономорфизм является инъекцией, и наоборот. Отсюда вытекает импликация
$$F(\alpha) \circ f = F(\alpha) \circ g \ \Rightarrow \ f = g$$
Следовательно, $F(\alpha)$ – инъекция.

2.5.3 Лемма Ионеды

Пусть $\mathscr{C}$ – категория, $c \in Ob\mathscr{C}$ – ее объект. Для каждого $(\alpha : a \to b) \in Mor\mathscr{C}$ будем обозначать через $\mathscr{C}(c, \alpha) : \mathscr{C}(c, a) \to \mathscr{C}(c, b)$ отображение, действующее как $\mathscr{C}(c, \alpha)(\beta) = \alpha \circ \beta$ на элементах $\beta \in \mathscr{C}(c, a)$. Пусть $h^c : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ – функтор, принимающий значения $h^c(a) = \mathscr{C}(c, a)$ и $h^c(\alpha) = \mathscr{C}(c, \alpha)$ на объектах c и морфизмах $\alpha : a \to b$ in $\mathscr{C}$.

Лемма 2.5.6 *Для любых функтора $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ и объекта $c \in Ob\mathscr{C}$ существуют биекции*
$$\mathrm{Set}^{\mathscr{C}}(h^c, F) \xrightarrow{\cong} F(c),$$
естественные по c и F.

Доказательство. Определим $\mathrm{Set}^{\mathscr{C}}(h^c, F) \to F(c)$ как $\eta \mapsto \eta_c(1_c)$. Проверим, что это отображение биективно. В силу естественности преобразования η коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} h^c(c) & \xrightarrow{\eta_c} & F(c) & \quad & 1_c & \mapsto & \eta_c(1_c) = x \\ \downarrow \mathscr{C}(c,\gamma) & & \downarrow F(\gamma) & & \downarrow & & \downarrow \\ h^c(a) & \xrightarrow{\eta_a} & F(a) & & \gamma & \mapsto & \eta_a(\gamma) = F(\gamma)(x) \end{array}$$

Определим для каждого $x \in F(c)$ семейство $\tilde{x}$ как $\tilde{x}_a(\gamma) = F(\gamma)(x)$. Ясно, что $\tilde{x}_a(1_a) = F(1_a)(x) = x$. Проверим, что $\tilde{x}$ является естественным преобразованием:

$$\begin{array}{ccccccc} h^c(a) & \xrightarrow{\tilde{x}_a} & F(a) & \quad & \gamma & \mapsto & F(\gamma)(x) \\ \downarrow \mathscr{C}(c,\alpha) & & \downarrow F(\alpha) & & \downarrow & & \downarrow \\ h^c(b) & \xrightarrow{\tilde{x}_b} & F(b) & & \alpha\circ\gamma & \mapsto & F(\alpha\circ\gamma)(x) = F(\alpha)(F(\gamma)(x)) \end{array}$$

Стало быть, $\tilde{x}$ – естественное преобразование.

Имеем функции $\varphi : \mathrm{Set}^{\mathscr{C}}(h^c, F) \to F(c)$, $\psi : F(c) \to \mathrm{Set}^{\mathscr{C}}(h^c, F)$, принимающие значения $\varphi(\eta) = \eta_c(1_c)$, $\psi(x) = \tilde{x}$. Легко видеть, что композиции $\psi\varphi$ и $\varphi\psi$ являются тождественными морфизмами.

Для любых объекта c и морфизма $\alpha : a \to b$ обозначим через $\mathscr{C}(\alpha, c) : \mathscr{C}(b, c) \to \mathscr{C}(a, c)$ отображение $\beta \mapsto \beta \circ \alpha$.

Пусть $Y : \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}^{\mathscr{C}}$ будет функтором, принимающим значения $Y(c) = h^c$ на $c \in Ob\mathscr{C}$, для которого естественные преобразования $Y(\alpha) : h^b \to h^a$ имеют компоненты $Y(\alpha)_c = \mathscr{C}(\alpha, c) : \mathscr{C}(b, c) \to \mathscr{C}(a, c)$. Функтор F называется *полным*, если отображения $F_{A,B} : \mathscr{C}(A, B) \to \mathcal{A}(F(A), F(B))$ сюръективны. Он называется *унивалентным*, если $F_{A,B}$ – инъекции для всех $A, B \in \mathscr{C}$. *Вложением* называется унивалентный функтор, инъективный на классе $Ob\mathscr{C}$.

Следствие 2.5.7 *Пусть $\mathscr{C}$ – малая категория. Тогда функтор $Y : \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}^{\mathscr{C}}$ является полным вложением.*

Доказательство. По лемме Ионеды мы имеем $\mathrm{Set}^{\mathscr{C}}(h^b, h^a) \cong h^a(b) = \mathscr{C}(a, b)$. Следовательно, Y – полный и унивалентный. Если $a \neq b$, то $h^a(c) \cap h^b(c) = \emptyset$. Следовательно, Y является полным вложением.

Обозначим через $h_c : \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ функтор $h_c(a) = \mathscr{C}(a, c)$, $h_c(\alpha) = f \circ \alpha$. Подставляя вместо $\mathscr{C}$ категорию $\mathscr{C}^{op}$, получаем

Следствие 2.5.8 *Для любых функтора $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ и объекта $c \in Ob\mathscr{C}$ существуют естественные по c и F биекции*

$$\mathrm{Set}^{\mathscr{C}^{op}}(h_c, F) \xrightarrow{\cong} F(c).$$

Следствие 2.5.9 *Пусть $h_* : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}^{\mathscr{C}^{op}}$ – функтор, ставящий в соответствие каждому $c \in Ob\mathscr{C}$ функтор h_c и каждому $\alpha \in \mathscr{C}(a, b)$ естественное преобразование $h_\alpha : h_a \to h_b$, компоненты которого $(h_\alpha)_c : \mathscr{C}(c, a) \to \mathscr{C}(c, b)$ действуют как $(h_\alpha)_c(f) = \alpha \circ f$. Тогда функтор $h_* : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}^{\mathscr{C}^{op}}$ является полным вложением.*

Замечание 2.5.1 *Категорию можно представлять себе как набор множеств со структурой и отображений между этими множествами, сохраняющими эту структуру. Но под формальное определение подходят и категории, объекты которых не являются множествами. Например, моноид - это категория, имеющая один объект. Предупорядоченное множество - категория, в которой для каждой пары объектов (a, b) существует не больше одного морфизма $a \to b$. Можно ли интерпретировать объекты как множества?*

Лемма Ионеды показывает, что можно. Будем рассматривать малую категорию $\mathscr{C}$. Объект категории $\mathscr{C}$ можно рассматривать как контравариантный функтор морфизмов. Стало быть, каждый объект a категории $\mathscr{C}$ можно задать как семейство множеств $\{\mathscr{C}(x,a)\}_{x\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}}$ вместе с семейством отображений $\{\mathscr{C}(y,a) \overset{\mathscr{C}(\alpha,a)}{\to} \mathscr{C}(x,a)\}_{x \overset{\alpha}{\to} y}$, удовлетворяющих условиям, вытекающим из функториальности h_a. Морфизм категории $\mathscr{C}$ можно рассматривать как естественное преобразование между контравариантными функторами морфизмов. Отсюда следует, что морфизм можно задать как семейство отображений множеств.

Пример 2.5.2 *Пусть $(X, \leq)$ – частично упорядоченное множество. Тогда функторы $h_a : X^{op} \to \mathrm{Set}$, а значит и объекты категории X, можно задать как множества $V_a = \{x \in X : x \leq a\}$. Морфизмы будут задаваться как включения подмножеств. Рассмотрим, например, малую категорию, соответствующую частично упорядоченному множеству a, b, c, d с отношением порядка $\{a \leq a, a \leq c, a \leq d, b \leq b, b \leq c, b \leq d, c \leq c, d \leq d\}$:*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[loop left] \arrow[d] \arrow[dr] & b \arrow[loop right] \arrow[d] \arrow[dl] \\
c \arrow[loop left] & d \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Ее объекты можно рассматривать как множества $V_a = a$, $V_b = b$, $V_c = a, b, c$ и $V_d = a, b, d$. Морфизмами между этими множествами будут вложения.

Глава 3

Пределы и копределы

Понятие *предела* является одним из самых важных в теории категорий. Переход к пределу позволяет строить объекты из других объектов. Рассматривая пределы в двойственных категориях, мы получаем *копределы.*

3.1 Пределы

Пусть $P(x, y, z)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что мы изучаем решения уравнения

$$P(x, y, z) = 0$$

в целых числах. Каждому решению можно сопоставить решение, имеющее место для всех натуральных $n \geq 1$

$$P(x, y, z) = 0 \mod 2^n \ ,$$

и мы приходим к необходимости изучать последовательности целых чисел

$$(\quad x_1 \mod 2, \quad x_2 \mod 2^2, \quad x_3 \mod 2^3, \quad \cdots) \ ,$$

удовлетворяющих условиям $x_k = x_{k+1} \mod p^k$, для $k = 1, 2, 3, \cdots$. Множество таких последовательностей будет удовлетворять некоторому свойству универсальности, оно будет кольцом и может быть построено как предел колец вычетов по модулю 2^n.

Обобщение этой конструкции приводит к понятию *предела.* Декартовы произведения и ядра групп являются частными случаями предела.

Пусть $\mathscr{C}$ – малая категория, $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ – функтор. *Пределом* $\varprojlim_{\mathscr{C}} F$ называется пара, состоящая из таких объекта $\varprojlim_{\mathscr{C}} F \in Ob\mathcal{A}$ и семейства морфизмов $\{p_c : \varprojlim_{\mathscr{C}} F \to F(c)\}_{c \in Ob\mathscr{C}}$, что для каждого морфизма $\alpha : a \to b$

категории $\mathscr{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \varprojlim_{\mathscr{C}} F \arrow[dl, "p_a"'] \arrow[dr, "p_b"] & \\ F(a) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(b) \end{tikzcd}$$

и если для любой другой пары, состоящей из объекта $A \in Ob\mathcal{A}$ и семейства морфизмов $\{\pi_c : A \to F(c)\}_{c \in Ob\mathscr{C}}$, делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_a"'] \arrow[dr, "\pi_b"] & \\ F(a) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(b) \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $u : A \to \varprojlim_{\mathscr{C}} F$, для которого коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dotted, "\exists! u"] \arrow[dr, "\pi_c"'] & & \varprojlim_{\mathscr{C}} F \arrow[dl, "p_c"] \\ & F(c) & \end{tikzcd}$$

при всех $c \in Ob\mathscr{C}$. Морфизмы $p_c : \varprojlim_{\mathscr{C}} F \to F(c)$ называются *проекциями* предела.

Лемма 3.1.1 *Семейство проекций предела $p_c : \varprojlim_{\mathscr{C}} F \to F(c)$ мономорфно в том смысле, что одновременное выполнение равенств $p_c \circ f = p_c \circ g$ для всех $c \in \mathscr{C}$ влечет $f = g$.*

В случае, когда $\mathscr{C}$ – дискретная категория, функтор $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ будет в точности семейством объектов $F(c) = A_c \in \mathcal{A}$. В этом случае предел называется произведением $\prod_{c \in \mathscr{C}} A_c$, а проекции предела – проекциями произведения.

Пример 3.1.1 *Если категория $\mathcal{A}$ является частично упорядоченным множеством, то произведением $\prod\limits_{i \in I} A_i$ будет точная нижняя грань $inf\{A_i : i \in I\}$ элементов $A_i \in \mathcal{A}$.*

Если $\mathscr{C}$ состоит из двух объектов a, b и двух морфизмов $p, q : a \to b$ (и тождественных морфизмов 1_a, 1_b), то предел функтора $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ называется *уравнителем* пары морфизмов $(F(p), F(q))$. Будем говорить, что категория $\mathcal{A}$ *имеет пределы* для функторов из заданного класса, если для каждого функтора из этого класса существует предел. В частности, утверждение "имеет произведения"означает, что для любых множества I и семейства объектов $\{A_i\}_{i \in I}$ существует произведение $\prod_{i \in I} A_i$.

Упражнение 3.1 *Описать произведения в категории Cat малых категорий и функторов.*

Уравнителем пары морфизмов $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$ является пара (E, λ), состоящая из объекта E и морфизма $\lambda : E \to A$ таких, что $\alpha \circ \lambda = \beta \circ \lambda$, и для любых других (E', λ'), удовлетворяющих $\alpha \circ \lambda' = \beta \circ \lambda'$, существует единственный морфизм $f : E \to E'$, для которого $\lambda \circ f = \lambda'$. Обозначим пару (E, λ) через $Eq(\alpha, \beta)$.

Предложение 3.1.2 *Пусть (E, λ) – уравнитель некоторой пары морфизмов. Тогда λ – мономорфизм.*

Такие мономорфизмы называются *строгими.*

Предложение 3.1.3 *В категории множеств* Set *каждый мономорфизм является уравнителем некоторой пары.*

Теорема 3.1.4 *Пусть $\mathcal{A}$ – категория. Следующие свойства категории $\mathcal{A}$ равносильны:*

(i) Для любых малой категории $\mathscr{C}$ и функтора $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ существует предел $\varprojlim_{\mathscr{C}} F$ в категории $\mathcal{A}$;

(ii) Категория $\mathcal{A}$ имеет произведения и уравнители.

Доказательство. $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ – функтор. Для каждого $\alpha \in Mor\mathscr{C}$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \prod_{c \in Ob\mathscr{C}} F(c) & & \prod_{\gamma \in Mor\mathscr{C}} F(\operatorname{cod}\gamma) \\ \downarrow p_{\operatorname{dom}\alpha} & & \downarrow \overline{p}_\alpha \\ F(\operatorname{dom}\alpha) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(\operatorname{cod}\alpha) \end{array} \tag{3.1}$$

где $\overline{p}_\alpha$ – проекции произведения $A_\alpha = F(\operatorname{cod}\alpha)$. Обозначим через

$$q_0 : \prod_{c \in Ob\mathscr{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in Mor\mathscr{C}} F(\operatorname{cod}\gamma)$$

(единственный) морфизм, делающий диаграмму (3.1) коммутативной. Проекции

$$p_{\operatorname{cod}\alpha} : \prod_{c \in Ob\mathscr{C}} F(c) \longrightarrow F(\operatorname{cod}\alpha)$$

тоже дают единственный морфизм $q_1 : \prod_{c \in Ob\mathscr{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in Mor\mathscr{C}} F(\operatorname{cod}\gamma)$, для которого $\overline{p}_\alpha \circ q_1 = p_{\operatorname{cod}\alpha}$. Рассмотрим уравнитель (Eq, e) пары морфизмов q_0 и q_1. Докажем, что пара $(Eq, \{p_c \circ e\}_{c \in Ob\mathscr{C}})$ является пределом функтора F.

Пусть $(A, \{\pi_c\}_{c \in Ob\mathscr{C}}$ – такая пара, что $F(\alpha) \circ \pi_{\operatorname{dom}\alpha} = \pi_{\operatorname{cod}\alpha}$ для всех $\alpha \in Mor\mathscr{C}$. Существует единственный морфизм $\pi = (\pi_c) : A \to \prod_c F(c)$, для которого $p_c \circ \pi = \pi_c$ для всех $c \in Ob\mathscr{C}$.

Рассмотрим диаграмму, в которой правый треугольник коммутативен при $i=0$, и $\overline{p}_\alpha \circ q_1 = p_{\operatorname{cod}\alpha}$.

$$\begin{array}{lcccc}
A & \stackrel{\pi}{\rightarrow} & \prod_{c\in Ob\mathscr{C}} F(c) & \stackrel{q_i}{\rightarrow} & \prod_{\gamma\in Mor\mathscr{C}} F(\operatorname{cod}\gamma) \\
\downarrow = & & \downarrow p_{\operatorname{dom}\alpha} & & \downarrow \overline{p}_\alpha \\
A & \stackrel{\pi_{\operatorname{dom}\alpha}}{\rightarrow} & F(\operatorname{dom}\alpha) & \stackrel{F(\alpha)}{\longrightarrow} & F(\operatorname{cod}\alpha)
\end{array}$$

Тогда для каждого $\alpha \in Mor\mathscr{C}$ мы имеем равенства

$$\overline{p}_\alpha \circ q_0 \circ \pi = F(\alpha)\circ p_{\operatorname{dom}\alpha}\circ \pi = F(\alpha)\circ \pi_{\operatorname{dom}\alpha} = \pi_{\operatorname{cod}\alpha} = p_{\operatorname{cod}\alpha}\circ\pi = \overline{p}_\alpha \circ q_1 \circ \pi.$$

Значит, для любых морфизма α и индекса $i \in \{0,1\}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{lcc}
A & \stackrel{q_i\circ\pi}{\rightarrow} & \prod_{\gamma\in Mor\mathscr{C}} F(\operatorname{cod}\gamma) \\
\downarrow = & & \downarrow \overline{p}_\alpha \\
A & \stackrel{\pi_{\operatorname{cod}\alpha}}{\rightarrow} & F(\operatorname{cod}\alpha)
\end{array}$$

Но для семейства $\{\pi_{\operatorname{cod}\alpha}\}$ такой морфизм $A \to \prod_{\gamma\in Mor\mathscr{C}} F(\operatorname{cod}\gamma)$ является единственным. Следовательно, $q_0\circ\pi = q_1\circ\pi$. Отсюда вытекает, что существует единственный морфизм $q : A \to Eq$, для которого $e\circ q = \pi$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{lcc}
E & \stackrel{e}{\rightarrow} & \prod_{c\in Ob\mathscr{C}} F(c) \\
\uparrow q & & \downarrow p_c \\
A & \stackrel{\pi_c}{\rightarrow} & F(c)
\end{array}$$

Имеют место равенства $p_c\circ e\circ q = p_c\circ\pi = \pi_c$, поскольку π является морфизмом, связанным с произведением объектов $F(c)$. Следовательно, существует такой $q : A \to Eq$, что все диаграммы

$$\begin{array}{lcc}
A & \stackrel{q}{\rightarrow} & Eq \\
\downarrow = & & \downarrow p_c\circ e \\
A & \stackrel{\pi_c}{\rightarrow} & F(c)
\end{array}$$

коммутативны. С другой стороны, если $q' : A \to Eq$ удовлетворяет соотношениям $(p_c\circ e)\circ q' = \pi_c$ для всех $c \in Ob\mathscr{C}$, то $p_c\circ(e\circ q') = \pi_c$ и, значит, $e\circ q' = e\circ q$. Но q – единственный, для которого диаграмма

$$\begin{array}{lcc}
A & \stackrel{e}{\rightarrow} & \prod_{c\in Ob\mathscr{C}} F(c) \\
\uparrow q & & \uparrow e\circ q = e\circ q' \\
A & \stackrel{=}{\rightarrow} & A
\end{array}$$

коммутативна. Стало быть $q = q'$. Таким образом, пара $(Eq, \{p_c\circ e\}_{c\in Ob\mathscr{C}})$ является пределом функтора F.

3.2 Построение пределов

Пусть $\mathscr{C}$ – категория множеств со структурой, например Set, Top, Grp. При доказательстве Теоремы 3.1.4 мы видели, что $\varprojlim_{\mathscr{C}} F$ – уравнитель пары морфизмов q_0 и q_1, где $q_0(\varphi)_\alpha = F(\alpha)(\varphi_{\mathrm{dom}_\alpha})$ и $q_1(\varphi)_\alpha = \varphi_{\mathrm{cod}\,\alpha}$. Следовательно, элементами множества $\varprojlim_{\mathscr{C}} F$ будут семейства φ_c, удовлетворяющие равенствам $\varphi_{\mathrm{cod}\,\alpha} = F(\alpha)(\varphi_{\mathrm{dom}\,\alpha})$ для всех $\alpha \in Mor\mathscr{C}$. Такие семейства называются *нитями.*

Пример 3.2.1 *Пусть $\mathbb{N}$ – упорядоченное множество неотрицательных целых чисел, $F : \mathbb{N}^{op} \to Ab$ – функтор в категорию абелевых групп. Мы видели, что такие функторы будут в точности обратными спектрами абелевых групп над $\mathbb{N}$. Для задания всех проекций обратного спектра достаточно указать последовательность гомоморфизмов*

$$... \to F(n+1) \to F(n) \to F(n-1) \to ... \to F(1) \to F(0)$$

Нитью будет произвольная последовательность элементов $x_n \in F(n)$, удовлетворяющих $F(n+1 > n)(x_{n+1}) = x_n$. Группа $\varprojlim_{\mathbb{N}^{op}} F$ состоит из нитей, операция над которыми производится по формуле $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$. Если $F(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ и $F(n+1) \to F(n)$ – проекции, определенные как $x \bmod p^{n+1} \mapsto x \bmod p^n$, то $\varprojlim_{\mathbb{N}^{op}}\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}$ будет группой целых $p-$адических чисел.

Пример 3.2.2 *Действие моноида на множестве можно рассматривать как функтор, определенный на категории, состоящей из одного объекта, морфизмами которой являются элементы этого моноида. Предел этого функтора будет равен множеству неподвижных точек.*

В категориях Set, Set_*, Top, Top_*, Grp, Ab, Mod_R предел состоит из нитей. Здесь Set_* обозначает категорию пунктированных множеств и отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную. Аналогично, категория Top_* состоит из пунктированных топологических пространств и непрерывных отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную.

3.3 Копределы

Пусть $\mathscr{C}$ – малая категория, $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ – функтор в категорию $\mathcal{A}$. Функтор F можно рассматривать как функтор $F^{op} : \mathscr{C}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$. Предел функтора F^{op} в категории $\mathcal{A}^{op}$ называется *копределом функтора F в категории $\mathcal{A}$* и обозначается $\varinjlim^{\mathscr{C}} F$. Таким образом, копредел – это пара $(\varinjlim^{\mathscr{C}} F, \{\lambda_c : F(c) \to \varinjlim^{\mathscr{C}} F\})$, состоящая из объекта и семейства морфизмов, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[dr, "\lambda_a"'] & & F(b) \arrow[dl, "\lambda_b"] \\ & \varinjlim^{\mathscr{C}} F & \end{tikzcd}$$

при всех $(\alpha : a \to b) \in Mor\mathscr{C}$.

Эта пара $(\varinjlim^{\mathscr{C}} F, \{\lambda_c\}_{c \in Ob\mathscr{C}})$ коуниверсальна в следующем смысле:

Рассмотрим категорию, объектами которой служат пары (A, λ), состоящие из объектов A из категории $\mathcal{A}$ и естественных преобразований $\lambda : F \to \Delta_{\mathscr{C}} A$. Морфизмами между такими парами являются тройки морфизмов $(f : A \to A', \lambda : F \to \Delta_{\mathscr{C}} A, \lambda' : F \to \Delta_{\mathscr{C}} A')$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[dr, "\lambda'"] & \\ \Delta_{\mathscr{C}} A \arrow[rr, "\Delta_{\mathscr{C}}(f)"'] & & \Delta_{\mathscr{C}} A' \end{tikzcd}$$

Легко видеть, что инициальным объектом в этой категории будет копредел функтора F, он будет задаваться парой, состоящей из объекта $\varinjlim^{\mathscr{C}} F$ и естественого преобразования $F \to \Delta_{\mathscr{C}} \varinjlim^{\mathscr{C}} F$, компоненты которого составляют семейство морфизмов копредела, которые называются *инъекциями* копредела. В случае дискретной категории копредел называется копроизведением семейства объектов, а инъекции копредела – инъекциями копроизведения.

Пример 3.3.1 *Пусть $\mathcal{A}$ – частично упорядоченное множество. Копроизведением в нем будет* $\sum\limits_{i \in I} A_i = sup\{A_i : \ i \in I\}$.

Пример 3.3.2 *Копроизведением в категории* Set *будет дизъюнктное объединение множеств. В категории Grp – свободное произведение $\prod^*_{i \in I} G_i$. В категории* Set_* *– букет множеств. В категории Mod_R – прямая сумма.*

Согласно двойственному утверждению к Теореме 3.1.4 можно утверждать, что для каждого функтора $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ копредел будет коуравнителем пары морфизмов

$$r_0, r_1 : \sum_{\alpha \in Mor\mathscr{C}} F(\operatorname{dom} \alpha) \overset{\to}{\to} \sum_{c \in Ob\mathscr{C}} F(c),$$

где символ $\sum$ обозначает копроизведение, а r_0 и r_1 – морфизмы, стрящиеся с помощью соответствующих диаграмм.

Пример 3.3.3 *В категории множеств копредел функтора $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ получается из дизъюнктного объединения $\coprod_{c \in Ob\mathscr{C}} F(c)$ отождествлением элементов $x \in F(\mathrm{dom}(\alpha))$ с элементами $F(\alpha)(x) \in F(\mathrm{cod}(\alpha))$.*

Пример 3.3.4 *Пусть $\mathcal{A} = Mod_R$ – категория левых R-модулей. Тогда для $x \in F(\operatorname{dom}\alpha)$ имеем*

$$r_0(x) = F(\alpha)(x) \in F(\operatorname{cod}\alpha), \quad r_1(x) = x \in F(\operatorname{dom}\alpha).$$

Следовательно, имеет место изоморфизм модулей $\varinjlim^{\mathscr{C}} F \cong \sum_{c\in Ob\mathscr{C}} F(c)/Q$, где подмодуль Q порожден элементами $x - F(\alpha)x$. Если $F : I \to Mod_R$ – функтор из категории $I = \mathbb{N}$, значения которого на морфизмах равны вложениям $F(i) \to F(j)$, то модуль $\varinjlim^I F$ изоморфен объединению $\cup_{i\in I} F(i)$. Рассмотрим, например, последовательность

$$\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^2} \subset \mathbb{Z}_{p^3} \subset \mathbb{Z}_{p^4} \cdots,$$

где $\mathbb{Z}_{p^n}$ – мультипликативная группа комплексных решений $z \in \mathbb{C}$ уравнения $z^{p^n} = 1$. Тогда абелева группа $\varinjlim^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ будет максимальной $p-$подгруппой аддитивной группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (с операцией сложения по $mod\, 1$).

Предложение 3.3.1 *Пусть $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ – функтор, $A \in Ob\mathcal{A}$ – объект. Тогда*

$$\mathcal{A}(\varinjlim^{\mathscr{C}} F, A) \cong \varprojlim_{\mathscr{C}^{op}} \mathcal{A}(F(-), A).$$

Доказательство. Пусть $\lambda_c : F(c) \to \varinjlim^{\mathscr{C}} F$ – морфизмы копредела. Для каждого морфизма $\varinjlim^{\mathscr{C}} F \xrightarrow{\alpha} A$ существует единственное семейство $\alpha_c = \alpha \circ \lambda_c : F(c) \to A$. Это семейство можно рассматривать как нить элементов $\alpha_c \in \mathcal{A}(F(c), A)$. Легко видеть, что соответствие $\alpha \mapsto \{\alpha_c\}_{c\in Ob\mathscr{C}}$ биективно.

Следствие 3.3.2 *Если существуют естественные по $c \in \mathscr{C}$ изоморфизмы*

$$\mathcal{A}(F(c), \varinjlim^{\mathscr{C}} F) \cong \mathcal{A}(F(c), F(c)),$$

то $\mathcal{A}(\varinjlim^{\mathscr{C}} F, \varinjlim^{\mathscr{C}} F) \cong \varprojlim_{\mathscr{C}}\{\mathcal{A}(F(c), F(c))\}$.

Замечание 3.3.5 *Семейство $\alpha_c : F(c) \to A$ можно рассматривать как естественное преобразование $F \to \Delta_{\mathscr{C}} A$. Следовательно, $\mathcal{A}(\varinjlim^{\mathscr{C}} F, A) \cong \mathcal{A}^{\mathscr{C}}(F, \Delta_{\mathscr{C}} A)$.*

Пример 3.3.6 *Так как $\varinjlim^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n} = C_{p^\infty}$ и образ любого гомоморфизма $\mathbb{Z}_{p^n} \to C_{p^\infty}$ содержится в $\mathbb{Z}_{p^n}$, то $Ab(\mathbb{Z}_{p^n}, C_{p^\infty}) \cong Ab(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^n})$. Следовательно*

$$Ab(C_{p^\infty}, C_{p^\infty}) \cong \varprojlim_{\mathbb{N}^{op}} Ab(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^n}).$$

Поскольку кольцо эндоморфизмов циклической группы порядка p^n изоморфно кольцу вычетов по модулю p^n, то отсюда вытекает, что кольцо эндоморфизмов квазициклической группы изоморфно кольцу целых $p-$адических чисел $\varprojlim_{\mathbb{N}^{op}}\{\mathbb{Z}_{p^n}\}$.

3.4 Декартовы квадраты

Пусть $f : A \to C$ и $g : B \to C$ – два морфизма в объект C. *Декартовым* (или *коуниверсальным*) *квадратом* для морфизмов f и g называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ \downarrow \pi_A & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} \tag{3.2}$$

такая, что для любых объекта D и морфизмов $\alpha : D \to A$, $\beta : D \to B$, удовлетворяющих равенству $g \circ \beta = f \circ \alpha$, существует единственный морфизм $\gamma : D \to P$, для которого $\pi_A \circ \gamma = \alpha$ и $\pi_B \circ \gamma = \beta$. В этом случае объект P, вместе с морфизмами π_A, π_B и $f \circ \pi_A$, будет пределом диаграммы $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} B$. Объект P называется *расслоенным произведением, ассоциированным со схемой* $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} B$ и обозначается $A \times_C B$.

Поскольку декартов квадрат является пределом, то в категории Set (или Top) он будет равен

$$A \times_C B = \{(a, b) : a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}.$$

Предложение 3.4.1 *Пусть (3.2) – декартов квадрат. Тогда если f – мономорфизм, то π_B – мономорфизм. Если f – ретракция, то π_B – ретракция.*

Доказательство. Если $f \circ i = 1_C$, то $f \circ (i \circ g) = g \circ 1_B$. В этом случае будет существовать единственный морфизм $j : B \to P$, для которого $\pi_A \circ j = i \circ g$ и $\pi_B \circ j = 1_B$. Следовательно π_B – ретракция.

Пример 3.4.1 *Пусть абелева группа G является копределом диаграммы, состоящей из $A \cap B$, A, B и вложений. Если каждый гомоморфизм $A \to G$ имеет образ в A, и каждый гомоморфизм $B \to G$ имеет образ в B, то получаем $End(G) \cong End(A) \times_{End(A \cap B)} End(B)$. Здесь через $X \times_Z Y$ обозначает предел диаграммы $X \to Z \leftarrow Y$.*

Пример 3.4.2 *Подгруппа $G \subseteq A \times B$ декартового произведения абелевых групп A и B называется подпрямой суммой, если проекции $p_A|_G : G \to A$ и $p_B|_G : G \to B$ являются эпиморфизмами.*

Легко видеть, что если в декартовом квадрате (3.2) в категории абелевых групп гомоморфизмы f и g сюръективны, то π_A и π_B сюръективны. Стало быть, в этом случае P будет подпрямой суммой A и B. Известно [12, С.55], что верно и обратное – каждая подпрямая сумма может быть получена как расслоенное произведение, ассоциированное со схемой, состоящей из эпиморфизмов.

Предложение 3.4.2 *Пусть задана коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array} \tag{3.3}$$

Если левый и правый квадраты декартовы, то декартов внешний квадрат. Если левый и внешний квадраты декартовы, то правый квадрат декартов.

Напомним, что мономорфизм называется строгим, если он является уравнителем некоторой пары морфизмов.

Предложение 3.4.3 *Пусть морфизм f в декартовом квадрате (3.2) является строгим мономорфизмом. Тогда π_B – строгий мономорфизм.*

3.5 Пределы и мономорфизмы в категории функторов

Наша следующая цель – доказать, что естественное преобразование в категории функторов является мономорфизмом (соотв. эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда все его компоненты – мономорфизмы (соотв. эпиморфизмы). Докажем, что пределы и копределы в категории функторов можно вычислять покомпонентно, а затем воспользуемся тем, что морфизм $\alpha : A \to B$ будет мономорфизмом, если и только если квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ \downarrow 1_A & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array} \tag{3.4}$$

является декартовым.

Теорема 3.5.1 *Пусть $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ – функтор. Семейство естественных преобразований $G \xrightarrow{\lambda_c} F(c)$ является его пределом в $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ тогда и только тогда, когда для каждого $d \in Ob\,\mathcal{D}$ семейство $G(d) \xrightarrow{(\lambda_c)_d} F(c)(d)$ – предел функтора $F(c)$ в категории $\mathcal{A}$.*

Иными словами, имеет место $(\varprojlim_{\mathscr{C}} F)(d) = \varprojlim_{\mathscr{C}}(F(d))$, для всех $d \in Ob\,\mathcal{D}$.

Лемма 3.5.2 *Если F переводит декартовы квадраты в декартовы, то он переводит мономорфизмы в мономорфизмы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha : A \to B$ – мономорфизм. Декартов квадрат (3.4) переводится в декартов. Следовательно, $F(\alpha)$ – мономорфизм.

Заметим, что справедливы двойственные утверждения. В частности, функтор, переводящий кодекартовы квадраты в кодекартовы, переводит эпиморфизмы в эпиморфизмы.

Теорема 3.5.3 *Естественное преобразование $\eta : F \to G$ между функторами $F, G : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ является* мономорфизмом *(соотв.* эпиморфизмом*), если и только если его компоненты $\eta_c : F(c) \to G(c)$ – мономорфизмы (соотв. эпиморфизмы).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если η – мономорфизм, то, поскольку декартов квадрат в $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ будет декартовым для каждого $d \in \mathcal{D}$, морфизмы η_d будут мономорфизмами. Обратное утверждение вытекает из определения мономорфизма.

Упражнение 3.2 *Доказать, что морфизм ориентированных графов является мономорфизмом (соотв. эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда он инъективен (соотв. сюръективен) на множествах стрелок и вершин.*

3.6 Относительно инъективные и проективные объекты

Для исследования вопросов о разрешимости уравнений выделяют объекты $P \in \mathcal{A}$, для которых эпиморфизмы $A \xrightarrow{f} B$ переходят в сюръекции $\mathcal{A}(P, f) : \mathcal{A}(P, A) \to \mathcal{A}(P, B)$. Такие объекты P называются проективными. В действительности выполнение этого свойства может требоваться не для всех эпиморфизмов. Так возникают *относительно проективные объекты* , которым посвящен данный параграф.

Эпиморфизмы обладают следующим свойством: Если в кодекартовом квадрате

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array} \tag{3.5}$$

α – эпиморфизм, то δ – эпиморфизм. Это свойство было установлено нами в двойственном случае. Следующий пример показывает, что в случае, когда α – мономорфизм, морфизм δ может не быть мономорфизмом.

Пример 3.6.1 *Пусть $\mathcal{A} = Ann$ – категория коммутативных колец с 1. Копроизведением в категории Ann будет тензорное произведение, инициальным объектом – кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Рассмотрим кодекартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{u} & \mathbb{Q} \\ \downarrow v & & \downarrow v' \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{u'} & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \end{array} \tag{3.6}$$

Поскольку $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = 0$, то u' – не мономорфизм.

Мономорфизм α называется *универсальным*, если верна импликация

диаграмма (3.5) – кодекартов квадрат $\Rightarrow$ δ – мономорфизм.

Упражнение 3.3 *Доказать, что в* Set *каждый мономорфизм универсален.*

Упражнение 3.4 *Доказать, что если в кодекартовом квадрате (3.5) морфизм α является универсальным мономорфизмом, то δ – универсальный мономорфизм.*

Пусть $\mathcal{A}$ – категория с кодекартовыми квадратами. Объект $I \in Ob\mathcal{A}$ называется *инъективным относительно класса мономорфизмов*, если для любых объектов $A, B \in Ob\mathcal{A}$ и мономорфизма $\mu : A \to B$ из этого класса морфизм
$$\mathcal{A}(B, I) \to \mathcal{A}(A, I), \quad \beta \mapsto \beta \circ \mu,$$
сюръективен.

Пример 3.6.2 *(Абсолютные ретракты Борсука.) Пусть $Metr$ – категория метризуемых пространств и непрерывных отображений. Пусть $\mathcal{P}_m$ состоит из непрерывных инъекций $X \to X'$, образы которых замкнуты. В частности, если $r : X \to X'$ – ретракция, то существует такой морфизм $i : X' \to X$, что $r \circ i = 1_{X'}$, и вложение $i(X') \subseteq X$ будет замкнутым отображением. Стало быть, коретракции принадлежат $\mathcal{P}_m$.*

Метризуемое пространство I называется $AR-$пространством, если для любого замкнутого мономорфизма $\theta : I \to X$ существует π, для которого $\pi \circ \theta = 1_I$. Согласно Борсуку [5] $AR-$пространства – это инъективные объекты относительно класса мономорфизмов $\mathcal{P}_m$.

Найдем условия, при которых аналогичное свойство имеет место для объектов категории достаточно общего вида.

Предложение 3.6.1 *Пусть $\mathcal{A}$ – категория с кодекартовыми квадратами. Объект $I \in Ob\mathcal{A}$ инъективен относительно универсальных мономорфизмов тогда и только тогда, когда всякий универсальный мономорфизм $i : I \to X$ в произвольный объект является коретракцией.*

При исследовании морфизмов категории возникают следующие задачи:

1. Описать (относительно) инъективные объекты. Ответить на вопрос, каждый ли объект допускает мономорфизм $X \to I$ из заданного класса в инъективный объект.

2. Определить, существует ли наименьший инъективный объект, обладающий данным свойством.

Определение 3.6.3 *Мономорфизм $\mu : X \to I$ называется существенным, если для каждого морфизма $u : I \to A$ верна импликация*
$$u \circ \mu \text{ – мономорфизм} \Rightarrow \quad u \text{ – мономорфизм.}$$
В этом случае, если I – инъективный объект, пара (I, μ) называется инъективной оболочкой объекта X.

Пример 3.6.4 *В категории абелевых групп инъективные объекты – в точности абелевы группы. Вложение $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ является существенным мономорфизмом, $\mathbb{Q}$ – инъективная оболочка $\mathbb{Z}$. В категории абелевых групп, или, более общим образом, в категории модулей над кольцом с 1 каждый объект обладает инъективной оболочкой [7].*

Глава 4

Сопряженные функторы

Рассмотрим сопряженные функторы и их свойства. Рекомендуемая литература: [9], [3], [11].

4.1 Универсальные стрелки

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор. *Универсальной стрелкой* для $B \in Ob\mathcal{B}$ называется пара (A, λ), состоящая из таких объекта $A \in Ob\mathcal{A}$ и морфизма $\lambda \in \mathcal{B}(B, U(A))$, что для любых объекта $A' \in Ob\mathcal{A}$ и морфизма $\mu : B \to U(A')$ существует единственный морфизм $\alpha : A \to A'$, удовлетворяющий равенству $U(\alpha) \circ \lambda = \mu$. Это свойство изображается с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\lambda} & U(A) & & A \\ \downarrow = & & \downarrow U(\alpha) & & \downarrow \exists!\alpha \\ B & \xrightarrow{\mu} & U(A') & & A' \end{array}$$

Если для каждого $B \in Ob\mathcal{B}$ существует универсальная стрелка

$$B \xrightarrow{\lambda_B} U(\Lambda B),$$

где Λ – отображение $Ob\mathcal{B} \to Ob\mathcal{A}$, то мы получаем функтор $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, значения которого на морфизмах равны морфизмам f, делающим коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\lambda_B} & U(\Lambda B) & & \Lambda B \\ \downarrow \beta & & \downarrow U(f) & & \downarrow \exists! f \\ B' & \xrightarrow{\lambda_{B'}} & U(\Lambda B') & & \Lambda B' \end{array}$$

Положим $\Lambda(B \to B') = f$.

Пример 4.1.1 *Пусть $U : Ab \to \mathrm{Set}$ – забывающий функтор, L – функтор, сопоставляющий каждому множеству E свободную абелеву группу LE,* *порожденную множеством E и каждому отображению $f : E_1 \to E_2$ – гомоморфизм Lf, для которого $Lf|_{E_1} = f$. Тогда для произвольного множества E вложение $\eta_E : E \to U(LE)$ является универсальной стрелкой.*

4.2 Свободные категории

Категория называется *свободной*, если она изоморфна категории путей ориентированного графа.

Для произвольного морфизма $\alpha \in Mor\mathscr{C}$ обозначим через $\mathscr{C}(\alpha)$ категорию, объектами которой являются пары морфизмов $a \stackrel{\alpha_0}{\to} c_0 \stackrel{\beta_0}{\to} b$, удовлетворяющих соотношению $\beta_0 \circ \alpha_0 = \alpha$. Морфизмами между $a \stackrel{\alpha_0}{\to} c_0 \stackrel{\beta_0}{\to} b$ и $a \stackrel{\alpha_1}{\to} c_1 \stackrel{\beta_1}{\to} b$ служат коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\alpha_0} & c_0 & \xrightarrow{\beta_0} & b \\ \downarrow = & & \downarrow \gamma & & \downarrow = \\ a & \xrightarrow{\alpha_1} & c_1 & \xrightarrow{\beta_1} & b \end{array} \tag{4.1}$$

Теорема 4.2.1 *Категория $\mathscr{C}$ свободна тогда и только тогда, когда она обладает следующими двумя свойствами:*

(1) каждый ее морфизм является эпиморфизмом и мономорфизмом;

(2) для каждого ее морфизма α категория $\mathscr{C}(\alpha)$ изоморфна конечному линейно упорядоченному множеству.

Заметим, что если категории $\mathscr{C}(\alpha)$ – частично упорядоченные множества, то в $\mathscr{C}$ нет изоморфизмов, отличных от тождественных, ибо равенство $\beta \circ \alpha$ повлекло бы существование морфизмов $\gamma : (\alpha, \beta) \circ (1_A, 1_A)$, $\gamma = \beta$, и $\gamma^{-1} : (1_A, 1_A) \to (\alpha, \beta)$, $\gamma^{-1} = \alpha$, приводящих к равенству $(1_A, 1_A) = (\alpha, \beta)$.

4.3 Сопряженные функторы

Определение 4.3.1 *Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – функторы. Функтор L называется* левым сопряженным *к функтору U, если существует естественная по $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ биекция*

$$\omega_{a,b} : \mathcal{B}(b, Ua) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(Lb, a).$$

Теорема 4.3.1 *Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – произвольные функторы. Тогда следующие свойства U и L эквивалентны:*

(1) Для каждого $b \in Ob\mathcal{B}$ существует универсальная стрелка

$$b \xrightarrow{\lambda_b} U(Lb).$$

(2) Функтор L сопряжен слева к U, т. е. существует естественная по a, b биекция

$$\omega_{a,b} : \mathcal{B}(b, Ua) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(Lb, a).$$

(3) Существуют естественные преобразования $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to UL$ и $\varepsilon : LU \to 1_{\mathcal{A}}$, делающие коммутативными диаграммы:

$$
\begin{array}{cccccccc}
L & \xrightarrow{L*\eta} & LUL & \qquad & U & \xrightarrow{\eta*U} & ULU \\
\downarrow = & & \downarrow \varepsilon * L & & \downarrow = & & \downarrow U*\varepsilon \\
L & \xrightarrow{1_L} & L & & U & \xrightarrow{1_U} & U
\end{array}
$$

где $(L*\eta)_a = L(\eta_a)$, $(\varepsilon * L)_a = \varepsilon_{La}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если для каждого $f : b \to Ua$ существует $\overline{f} : Lb \to a$, то определим $f \mapsto \overline{f}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Если морфизмы $\omega_{a,b}$ естественны по a и b, то коммутативны следующие диаграммы

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{A}(Lb, Lb) & \xrightarrow{\omega^{-1}} & \mathcal{B}(b, ULb) & \qquad & 1 & \mapsto & \lambda_b \\
\downarrow \mathcal{A}(1,\alpha) & & \downarrow \mathcal{B}(1, U\alpha) & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{A}(Lb, a) & \xrightarrow{\omega^{-1}} & \mathcal{B}(b, Ua) & & \alpha & \mapsto & \omega^{-1} = U(\alpha)\circ\lambda_b
\end{array}
$$

Возьмем $\eta_b = \omega^{-1}(1_{Lb})$. Аналогично, рассматривая

$$1_{Ua} \in \mathcal{A}(Ua, Ua) \xrightarrow{\omega} \mathcal{A}(LUa, a),$$

положим $\varepsilon_a = \omega(1_{Ua})$.

Используя (3) можно доказать, что $\{\eta_b : b \to ULb\}$ – универсальная стрелка.

Пример 4.3.2 *Для любых множеств A, B и C имеют место изоморфизмы* $\mathrm{Set}\,(A \times B, C) \cong \mathrm{Set}\,(A, C^B)$.

Категория $\mathscr{C}$ называется декартово замкнутой, *если для любых $B, C \in Ob\mathscr{C}$ существует объект C^B, определенные с помощью изоморфизмов*

$$\mathscr{C}(A \times B, C) \cong \mathscr{C}(A, C^B).$$

Например, категория G-множеств декартово замкнута для любой группы G. Декартово замкнуты категории Grp и Top.

Пример 4.3.3 *Пусть X и Y – частично упорядоченные множества. Если рассматривать их как категории, то произвольная пара сопряженных функторов $U : X^{op} \to Y$ и $L : Y^{op} \to X$ будет в точности соответствием Галуа между X и Y.*

Теорема 4.3.2 *Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор, имеющий левый сопряженный. Тогда для каждой малой категории J и функтора $F : J \to \mathcal{A}$ существует изоморфизм*

$$U(\varprojlim{}_J F) \cong \varprojlim{}_J (U \circ F).$$

Доказательство. Будем использовать тот факт, что если существуют пары сопряженных функторов

$$\mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B} \leftrightarrows \mathscr{C},$$

то композиции сопряжены. Заметим, что левый сопряженный к функтору является единственным с точностью до изоморфизма. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^J & \xleftarrow{L_*} & \mathcal{B}^J \\ \uparrow \Delta_J & & \uparrow \Delta_J \\ \mathcal{A} & \xleftarrow{L} & \mathcal{B} \end{array}$$

где $L_* = L \circ (-)$. В силу свойства универсальности функтор L_* сопряжен слева к $U_* = U \circ (-)$. По определению предела существует изоморфизм $\mathcal{A}^J(\Delta_J A, F) \cong \mathcal{A}(A, \varprojlim_J F)$. Стало быть, Δ_J сопряжен слева к $\varprojlim_J$. Таким образом, $\varprojlim_J \circ U_* \cong U \circ \varprojlim_J$.

4.4 Теорема Фрейда

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор. Докажем, что если U сохраняет пределы, то он имеет левый сопряженный. Мы видели, что существование левого сопряженного связано с универсальной стрелкой. Универсальную стрелку можно определить с помощью комма-категории по Маклейну. Напомним, что для каждого $b \in Ob\mathcal{B}$ *комма-категория* b/U – это категория, класс объектов которой состоит из пар $(a \in Ob\mathcal{A}, \alpha \in \mathcal{B}(b, Ua))$, а морфизмами $(a_1, \alpha_1) \to (a_2, \alpha_2)$ между такими парами служат морфизмы $f : a_1 \to a_2$, делающие коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\alpha_1} & U(a_1) \\ \downarrow = & & \downarrow U(f) \\ b & \xrightarrow{\alpha_2} & U(a_2) \end{array}$$

Обозначим через $Q_b : b/U \to \mathcal{A}$ забывающий функтор, действующий как $(a, \alpha) \mapsto a$ на объектах, и $f \mapsto f$ – на морфизмах. Ясно, что универсальная стрелка для $b \in Ob\mathcal{B}$ будет в точности инициальным объектом в комма-категории b/U. По теореме 4.3.1 U имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда для каждого $b \in \mathcal{B}$ категория b/U имеет инициальный объект.

Лемма 4.4.1 *(О существовании инициального объекта) Пусть $\mathcal{D}$ – полная категория. Тогда $\mathcal{D}$ имеет инициальный объект, если и только если существуют множество I и семейство $\{k_i\}_{i \in I}$ объектов из $\mathcal{D}$ такие, что для каждого $d \in \mathcal{D}$ найдутся элемент $i \in I$ и морфизм $k_i \to d$ в категории $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Пусть $\{k_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию леммы. Тогда произведение $w = \prod_{i \in I} k_i \in \mathcal{D}$ имеет морфизмы $w \to d$ для всех $d \in \mathcal{D}$, например, заданные как композиции $w = \prod k_i \to k_i \to d$, где первые стрелки

– проекции произведения. Рассмотрим уравнитель $\varepsilon : v \to w$ множества всех эндоморфизмов объекта w. Для каждого $d \in \mathcal{D}$ существует равная композиции $v \to w \to d$ стрелка $v \to d$. Пусть были заданы две стрелки $f, g : v \to d$, возьмем их уравнитель ε_1, как это показано на диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{\varepsilon_1} & v & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & d \\ \uparrow s & & \downarrow \varepsilon & & \\ w & \xrightarrow{1_w} & w & & \end{array}$$

Тогда $\delta\varepsilon = \varepsilon$ для всех $\delta : w \to w$. Значит $\varepsilon\varepsilon_1 s\varepsilon = \varepsilon$. Но ε является уравнителем и, значит, мономорфизмом; сокращение на ε слева приводит к равенству $\varepsilon_1 s\varepsilon = 1_v$. Таким образом, ε_1 является ретракцией. Аналогично ε_1 является мономорфизмом, как уравнитель. Следовательно ε_1 есть изоморфизм и $f = g$. Мы доказали, что v – инициальный объект в $\mathcal{D}$. Мы видим, что категория $\mathcal{D}$ имеет коинициальное множество, если существуют множество I и семейство $\{k_i\}_{i \in I}$ объектов из $\mathcal{D}$, такие, что для каждого $d \in Ob\mathcal{D}$ th-существует морфизм $k_i \to d$ для некоторого $i \in I$. Из доказанной леммы легко устанавливается, что имеет место

Теорема 4.4.2 *(Фрейд) Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – полные категории, $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор. Тогда U имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда он сохраняет пределы и для каждого $b \in Ob\mathcal{B}$ категория b/U имеет коинициальное множество.*

4.5 Расширения Кана

Пусть $S : \mathscr{C} \to \mathbb{D}$ – функтор между малыми категориями, и $\mathcal{A}$ – произвольная категория. Рассмотрим функтор $(-) \circ S : \mathcal{A}^{\mathbb{D}} \to \mathcal{A}^{\mathscr{C}}$, действующий на объектах как $F \mapsto F \circ S$, на морфизмах – $\eta \mapsto \eta \star S$ Левый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *левым расширением Кана* и обозначается $Lan^S : \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \to \mathcal{B}^{\mathbb{D}}$. Правый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *правым расширением Кана* .

Пример 4.5.1 *Пусть $i : H \subseteq G$ – вложение подгруппы в группу. Для любого $H-$модуля $M \in Ab^H$ индуцированный модуль [6]*

$$Ind_H^G M = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

будет изоморфен $Lan^i M$, а коиндуцированный модуль

$$Coind_H^G M = Ab^H(\mathbb{Z}[G], M)$$

изоморфен $Ran_i M$.

Согласно определению сопряженных функторов, функторы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \arrow[r, bend left, "Lan^S"] & \mathcal{A}^{\mathscr{D}} \arrow[l, bend left, "(-)\circ S"] \end{tikzcd}$$

связаны естественной биекцией

$$\mathcal{A}^{\mathscr{D}}(Lan^S F, G) \cong \mathcal{A}^{\mathscr{C}}(F, G \circ S) .$$

В этом случае пара $(Lan^S F, \eta_F)$ будет универсальной стрелкой:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\eta_F"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & & (Lan^S F)\circ S \arrow[dl, "\overline{\varphi}*S"] & Lan^S F \arrow[d, "\exists!\overline{\varphi}"] \\ & G\circ S & & G \end{tikzcd}$$

Пусть $d \in Ob\,\mathbb{D}$ – объект. Напомним, что S/d обозначает *комма–категорию.* Объектами этой категории являются пары, состоящие из объекта $c \in \mathscr{C}$ и морфизма $\alpha : S(c) \to d$, а морфизмы $(c, \alpha) \to (c', \alpha')$ задаются морфизмами $\beta : c \to c'$, удовлетворяющими соотношению $\alpha' \circ \beta = \alpha$. Таким образом, морфизмами служат коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} S(c) & \xrightarrow{\alpha} & d \\ \downarrow S(\beta) & & \downarrow = \\ S(c') & \xrightarrow{\alpha'} & d \end{array}$$

Обозначим через $Q_d : S/d \to \mathscr{C}$ забывающий функтор.

Теорема 4.5.1 *Пусть $\mathcal{A}$ – категория с копределами. Левое расширение Кана функтора $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ вдоль $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ можно определить как функтор, принимающий значения*

$$Lan^S F(d) = \varinjlim \left(S/d \overset{Q_d}{\to} \mathscr{C} \overset{F}{\to} \mathcal{A} \right) .$$

Доказательство. Пусть задано естественное преобразование $\varphi : F \to G \circ S$. Построим естественные по d морфизмы $\varinjlim^{S/d} FQ_d \to G(d)$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$S/d \overset{Q_d}{\to} \mathscr{C} \underset{G\circ S}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{A} .$$

Для всех $(c, \alpha) \in S/d$ морфизмы $G(\alpha) : G(S(c)) \to G(d)$ дают коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} GSQ_d(c_1, \alpha_1) & \xrightarrow{G(\alpha_1)} & G(d) \\ \downarrow GSQ_d(\beta) & & \downarrow = \\ GSQ_d(c_2, \alpha_2) & \xrightarrow{G(\alpha_2)} & G(d) \end{array}$$

которые составляют естественное преобразование $GSQ_d \to \Delta_{S/d} G(d)$. Композиция $FQ_d \to GSQ_d \to \Delta_{S/d} G(d)$ после перехода к прямому пределу приводит к искомым морфизмам $\overline{\varphi}_d : \varinjlim^{S/d} FQ_d \to G(d)$. Можно проверить непосредственно, что отображение, сопоставляющее каждому естественному преобразованию $\varphi : F \to G \circ S$ естественное преобразование $\overline{\varphi}_d$ будет биекцией.

Тем не менее, мы укажем универсальную стрелку.

Пусть $\nu_{(c_1,\alpha_1:Sc_1\to Sc)} : F(c_1) \to \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc}$ – канонические морфизмы копредела. Положим $(\eta_F)_c : F(c) \to \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc}$ равным $\nu_{(c,1_{Sc}:Sc\to Sc)}$. Легко видеть, что коммутативна диаграмма:

$$
\begin{array}{cccc}
F(c) & \xrightarrow{(\eta_F)_c} & \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc} & \varinjlim^{S/d} FQ_d \\
\downarrow = & & \downarrow & \downarrow \\
F(c) & \xrightarrow{\varphi_c} & GS(c) & G(d)
\end{array}
$$

Следовательно, η_F – универсальная стрелка, а функтор $\{\varinjlim^{S/d} FQ_d\}_{d\in\mathbb{D}}$ сопряженным слева к $(-)\circ S$. $\square$

4.6 Метод построения сопряженных функторов

Пусть $\mathscr{C}$ – кополная категория. Тогда с каждой малой категорией $\mathbb{D}$ и функтором $H : \mathbb{D} \to \mathscr{C}$ связан функтор

$$D : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}^{\mathbb{D}^{op}},$$

принимающий на объектах $C \in \mathscr{C}$ значения $D(C) = \mathscr{C}(H(-), C)$. Морфизму $f : C \to C'$ сопоставляется естественное преобразование, имеющее компоненты

$$\mathscr{C}(H(d), C) \xrightarrow{\mathscr{C}(H(d),f)} \mathscr{C}(H(d), C'),$$

сопоставляющие каждому морфизму $H(d) \xrightarrow{g} C$ композицию $f \circ g$ морфизмов

$$H(d) \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} C'$$

Теорема 4.6.1 *Пусть $\mathscr{C}$ – полная, а $\mathscr{D}$ – малая категории. Для любого функтора $H : \mathbb{D} \to \mathscr{C}$ функтор $D : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}^{\mathbb{D}^{op}}$ имеет левый сопряженный, изоморфный левому расширению Кана $G = Lan^{h_*} H$*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, bend right, "D"'] & & \mathrm{Set}^{\mathbb{D}^{op}} \arrow[ll, bend right, "G"'] \\
& \mathbb{D} \arrow[ul, "H"] \arrow[ur, "h_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Доказательство. Поскольку $D = h_C \circ H^{op}$, то нужно доказать, что существует естественная по $X \in \mathrm{Set}^{\mathbb{D}^{op}}$ биекция

$$\mathrm{Set}^{\mathbb{D}^{op}}(X, h_C \circ H^{op}) \xrightarrow{\omega} \mathscr{C}((Lan^{h_*} H)(X), C).$$

Рассмотрим произвольное естественное преобразование $\eta : X \to h_C \circ H^{op}$ и построим для него $\omega(\eta)$. В силу естественности η имеют место коммутативные для всех $\alpha : d \to d'$ диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X(d) \arrow[r, "\eta_d"] & \mathscr{C}(H(d), C) \\
X(d') \arrow[u, "X(\alpha)"] \arrow[r, "\eta_{d'}"'] & \mathscr{C}(H(d'), C) \arrow[u, "\mathscr{C}(H(\alpha){,}1_C)"']
\end{tikzcd}$$

в которых компоненты η_d естественного преобразования сопоставляют элементам $x \in X(d)$ отображения

$$\eta_d(x) : H(d) \to C\,.$$

По теореме 4.5.1 множество $\mathscr{C}((Lan^{h_*}H)(X), C)$ будет равно

$$\mathscr{C}(\varinjlim{}^{h_*/X} HQ_X, C) \cong \varprojlim{}_{\widetilde{x} \in h_*/X} \mathscr{C}(H(d), C)\,.$$

Стало быть, его элементы можно рассматривать как нити $(\xi_{\widetilde{x}})_{\widetilde{x} \in h_*/X}$ – семейства морфизмов, делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H(d) \arrow[dr, "\xi_{\widetilde{x}}"] & \\
& C \\
H(d') \arrow[uu, "H(\alpha)"] \arrow[ur, "\xi_{\widetilde{x'}}"'] &
\end{tikzcd}$$

для любых морфизмов $\widetilde{x} \xrightarrow{\alpha} \widetilde{x'}$ категории h_*/X.

Естественному преобразованию $\eta : X \to h_C \circ H^{op}$ можно сопоставить семейство морфизмов $\xi_{\widetilde{x}} = \eta_d(x) \in \mathscr{C}(H(d), C)$, где $\widetilde{x}$ пробегает все объекты категории h_*/X. Для того, чтобы установить, что эти семейства будут нитями, проверим равенства $\xi_{\widetilde{x}} \circ H(\alpha) = \xi_{\widetilde{x'}}$:

$$\xi_{\widetilde{x'}} = \eta_{d'}(x') \in \mathscr{C}(H(d'), C) \Rightarrow \xi_{\widetilde{x'}} \circ H(\alpha) = \eta_{d'(x')} \circ H(\alpha) = \eta_d(X(\alpha)(x'))\,.$$

Поэтому, в случае $x = X(\alpha)(x')$, будет иметь место равенство $\eta_d(x) = \xi_{\widetilde{x'}} \circ H(\alpha)$, из которого следует $\xi_{\widetilde{x}} = \xi_{\widetilde{x'}} \circ H(\alpha)$. Легко видеть, что полученное отображение $\eta \mapsto (\xi_{\widetilde{x}})$, $\xi_{\widetilde{x}} = \eta_d(x)$, взаимно однозначно, и обратным для него будет отображение, сопоставляющее нити $(\xi_{\widetilde{x}})$ естественное преобразование $\eta_d(x) = \xi_{\widetilde{x}}$. Следовательно, ω будет естественной биекцией. $\square$

Предметный указатель

Литература

[1] Adámek J., Herrlich H., Strecker G.E. *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats.* University of Bremen, – 2004

[2] Semadeni Z., Wiweger A. *Einfuhring in die Theorie der Kategorien und Funktoren.* – Leipzig, 1979

[3] Schubert H. *Kategorien.* – Berlin, etc. : Springer-Verlag, 1971

[4] van Oosten J. *Basic Category Theory.* – BRICS Lecture Series, 1995

[5] Борсук К. *Теория ретрактов.* – М. Мир, 1971.

[6] Браун К.С. *Когомологии групп.* – М.: Наука, 1987.

[7] Букур И., Деляну А. *Введение в теорию категорий и функторов.* – М.: Мир, 1972.

[8] Габриель П., Цисман М. *Категории частных и теория гомотопий.* – М.: Мир, 1971.

[9] Маклейн С. *Категории для работающего математика.* М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с.

[10] Общая алгебра / под ред. Скорнякова Л.А. Т.2 (Артамонов В.А., Салий В.Н. и др.) – М.: Наука, 1990.

[11] Фейс К. *Алгебра: Кольца, модули и категории. Т. 1.* – М.: Мир, 1977.

[12] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы. Т. 1.* – М. Мир, 1974.