УДК 512.66

ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ КУБИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СИСТЕМАХ ОБЪЕКТОВ

А. А. Хусаинов

Аннотация

Работа продолжает исследования автора по теории гомологий кубических множеств с системами коэффициентов. Главный результат - доказана теорема о том, что гомологии кубических множеств с коэффициентами в контравариантных системах объектов абелевой категории с точными копределами являются правыми сателлитами функтора копредела. Она была получена ранее автором для частного случая контравариантных систем состоящих из абелевых групп. Главный результат применяется в работе для доказательства ряда утверждений о гомологиях и когомологиях кубических множеств с коэффициентами в системах объектов абелевых категорий, включая гомологии и когомологии с коэффициентами в локальных системах.

2010 Mathematics Subject Classification 55N25, 55U05, 18G35, 18A40, 18E10, 18G10, 18G40, 55P10, 55U15

Ключевые слова: кубические множества, полу-кубические множества, кубические гомологии, проективные резольвенты, кубические когомологии, кубические гомологии категорий, когомологии Бауэса-Виршинга, локальные системы, слабая эквивалентность, спектральная последовательность.

Содержание

1 Введение

Работа посвящена теории гомологий кубических множеств с коэффициентами в контравариантных системах объектов абелевой категории с точными копроизведениями.

В предшествующих работах автор изучал гомологии полукубических множеств [45] и кубических множеств [35] с коэффициентами в контравариантных системах абелевых групп.

При изложении истории и приложений гомологий кубических гомологий мы будем учитывать, что согласно доказанной нами теореме 7.7, теория гомологий полукубических множеств с коэффициентами в системах является частью теории гомологий кубических множеств.

1.1 Краткая история и приложения кубических гомологий

Серр [56] ввел кубические сингулярные гомологии топологических пространств с коэффициентами в локальных системах и примененил их для построения спектральных последовательностей используемых при вычислении гомотопических групп. Эйленберг и Маклейн [20], доказали эквивалентность сингулярных кубических и симплициальных гомологий. Абстрактные кубические множества и их гомологии и гомотопические группы были введены Каном [42].

Теория кубических множеств привела к развитию неабелевой алгебраической топологии [8]. Одна из самых важных структур, ω-группоид, была введена в работе [7], как кубическое множество с дополнительными операциями. Это стимулировало развитие других ω-структур.

Для построения инвариантов групп и узлов использовались стоечные когомологии (rack cohomology), когомологии квандла (quandle), допускающие кубическое описание [16], [17], [18]. Методы из [20] применялись также для неклассических гомологий, например, для изучения решений уравнения Янга-Бакстера рассмотрены косые (skew) кубические гомологии в категориии R-модулей [46].

Кубическое множество определяется как предпучок множеств над некоторой малой категорией, называющейся кубическим сайтом. Грандис и Маури [30] обратили внимание на наиболее популярные кубические сайты, доказали существование нормальной формы разложения морфизмов для каждого из этих сайтов и охарактеризовали расширенный кубический сайт (со связями и перестановками interchanges).

Для изучения метрических пространств появились кубические дискретные гомологии [1], [2]. [4]. Существуют работы по гомологиям кубических множеств со связями [3].

Гомологии полукубических множеств применялись для исследования топологических свойств моделей параллельных вычислительных систем - автоматов высших размерностей [28], [21], [22], [23], [40]. Для моделирования параллельных вычислительных процессов Грандис разработал направленную алгебраическую топологию [32], в которой нашли приложения введенные им направленные кубические гомологии [29]. С помощью теории гомологий полукубических множеств автор данной статьи решил проблему, поставленную им в 2004 году - построил алгоритм вычисления групп гомологий безопасных сетей Петри [36].

Теория сингулярных когомологий используется для формализации синтетической теории когомологий в кубическом расширении Agda [9]. Синтетические группы когомологий используются для того, чтобы устанавливать, что топологические пространства не являются гомотопически эквивалентными. Существует проблема, связанная с выбором базиса сингулярных коцепей. Операция выбора этого базиса не инвариантна относительно гомотопической эквивалентности, что делает невозможной эту операцию при синтетической формализации групп когомологий. Но разработчики нашли выход, использующий пространства Эйленберга-Маклейна. Эти когомологии использовались для формализации клеточных когомологий [11]. Формализация синтетической теории когомологий в Agda позволило упростить многие докаательства из теории гомотопических типов [9]. Оптимизированное определение чашечного произведения позволило дать полную систему аксиом для превращения целочисленных групп когомологий в градуированное коммутативное кольцо. Это использовалось для характеризации групп когомологий сфер, тора, бутылки Клейна и вещественных/проективных плоскостей. Конструктивные доказательства позволяют использовать Cubical Agda для различения пространств с помощью вычислений.

Кубические гомологии применяются в цифровой топологии, для анализа образов, и для анализа топологических данных [41]. Пикселы, вокселы и аналогичные модели точек представляются как элементарные кубы. Они могут составлять полукубические множества [45]. Одна из важнейших задач - построение алгоритма для обнаружения простых точек - точек, удаление которых не изменяют топологию обрабатываемой фигуры. Эта задача решается в [51] с помощью кубических гомологий. Кубические гомологии применяются к алгоритмическому вычислению индекса Конли для непрерывных отображений [54]. В работе [37] развивается числовая кубическая гомология и доказана теорема Гуревича для числовой кубической сингулярной гомологии. В работе [38] развивается теория числовых кубических гомологий для анализа цифровых образов.

Для обработки больших объемов топологических данных возникает необходимость вычисления инвариантов относительно преобразования подобия. Например, для фрактальных множеств может потребоваться вычисление дробных чисел Бетти. Это делается с помощью предельного перехода, аналогичного используемого для вычисления ящичной размерности Хаусдорфа. Данная задача решается с помощью персистентных гомологий [12], [19], и традиционно применяются симплициальные гомологии. Для решения аналогичных задач, при вычисления персистентных гомологий в метрическом пространстве, в работе [14] были применены кубические гомологии. Алгоритмы вычисления более эффективны, чем алгоритмы основанные на методах триангуляции, и они могут быть естественно использованы для множеств точек в n-мерном пространстве с расстоянием между точками вычисляемому с помощью нормы L_∞. Аналогичные вопросы изучались в [31] для анализа образов, как с помощью симплициальных, так и кубических гомологий.

1.2 Последовательность изложения статьи

1.2.1 Определение гомологий кубического множества с коэффициентами в контравариантных системах

Для кубического объекта в абелевой категории $\mathcal{A}$ заданного как функтор $F : \square^{op} \to \mathcal{A}$ определяется нормализованный комплекс $C_*^N(F)$. Он состоит из фактор-объектов объекта $F(\mathbb{I}^k)$ по подобъектам вырожденных цепей:

$$C_k^{\mathrm{N}}(F) = \operatorname{Coker}\left(F(\mathbb{I}^{k-1})^{\oplus k} \xrightarrow{(F(\sigma_1^k),\ldots,F(\sigma_k^k))} F(\mathbb{I}^k)\right),$$

где $\sigma_i^k : \mathbb{I}^k \to \mathbb{I}^{k-1}$ - морфизмы вырождения в категории кубов $\square$. Дифференциалы d_k комплекса $C_*^N(F)$ индуцированы морфизмами

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(F(\delta_i^{k,0}) - F(\delta_i^{k,1})) : F(\mathbb{I}^k) \to F(\mathbb{I}^{k-1}),$$

для всех $k \geqslant 1$, и $d_0 = 0$. Этот нормализованый комплекс для кубического объекта в абелевой категории был исследован в статье Świątek [57].

Объекты гомологий $H_k^N(F) := \operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k+1}$ комплекса $C_*^N(F)$ называются k-ми объектами гомологий (или просто гомологиями) кубического объекта F, для всех $k \geqslant 0$.

Гомологии кубического множества $X : \square^{op} \to \mathrm{Set}$ с коэффициентами в функторе $G : (\square/X)^{op} \to \mathcal{A}$ определяются как гомологии кубического объекта, равного левому расширению Кана $Lan^{Q_X^{op}}G$ функтора $G : (\square/X)^{op} \to \mathcal{A}$ вдоль функтора $Q_X^{op} : (\square/X)^{op} \to \square^{op}$,

$$H_k(X, G) = H_k^N(Lan^{Q_X^{op}}G), k \geqslant 0.$$

1.2.2 Основные результаты

В статье [35] было доказано, что группы гомологий $H_n(X,G)$ кубического множества X с коэффициентами в контравариантной системе абелевых групп $G : (\square/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ изморфны значениям производных функтора копредела $\varinjlim_n^{(\square/X)^{op}} G$ для всех $n \geqslant 0$. Это утверждение позволило применять теорию гомологий малых категорий для изучения гомологий кубических множеств. К сожалению, принцип двойственности (в теории категорий) примененный к этому утверждению, не дает аналогичный результат для когомологий (он приводит к изоморфизму когомологий кубических множеств и значений производных функтора предела со значениями в ковариантных системах компактных абелевых групп).

Мы доказываем, что гомологии кубического множества X с коэффициентами в контравариантных системах $G : (\square/X)^{op} \to \mathcal{A}$ объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями изоморфны левым сателлитам функтора копредела $\varinjlim_n^{(\square/X)^{op}} G$. Принцип двойственности дает изоморфизм объектов когомологий кубического множества с коэффициентами в ковариантной системе и значений правых сателлитов функтора предела в абелевой категории с точными произведениями.

Доказана теорема об инвариантности гомологий кубического множества с коэффициентами в контравариантной системе, относительно перехода к прямому образу.

Дополнен критерий изоморфизма гомологий кубического множества при переходе к обратному образу, для контравариантных систем со значениями в произвольных абелевых категориях с точными произведениями.

Доказано, что когомологии Бауэса-Виршинга малой категории с коэффициентами в натуральной системе изоморфны когомологиям кубического нерва этой категории с коэффициентами в ковариантной системе, соответствующей натуральной системе.

Получены формулы для гомологий кубических множеств с коэффициентами в локальных системах. Доказан изоморфизм когомологий локальных систем на слабо эквивалентных кубических множествах относительно стандартной модельной структуры.

Построена спектральная последовательность для когомологий копредела кубических множеств с ковариантными системами.

Для когомологий кубических множеств с коэффициентами в локальных системах абелевых групп, построена спектральная последовательность морфизма кубических множеств, обратные слои которого слабо эквивалентны между собой (относительно страндартной модельной структуры).

Доказано, что гомологии полукубического множества с коэффициентами в контравариантной системе изоморфны гомологиям универсального кубического множества с коэффициентами в расширенной контравариантной системе.

1.2.3 Шаги изложения

Секция 1 содержит введение, краткую историю и приложения кубических гомологий, и описание полученных результатов.

Секция 2 посвящена предварительным сведениям. Вводятся обозначения и приводится определение гомологий малых категорий с коэффициентами в диаграмме объектов в абелевой категории с точными копроизведениями. Приведен метод построения комплекса, гомологии которого равны гомологиям категории. Метод обоснован в предложении 2.3.

$\mathscr{D}$-множеством называется функтор $\mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Set}$, где $\mathscr{D}$ - произвольная малая категория.

Секция 3 посвящена гомологиям $\mathscr{D}$-множеств X с коэффициентами в котравариантной системе $(\mathscr{D}/X)^{op} \to \mathcal{A}$. Гомологиями $\mathscr{D}$-множеств называются левые сателлиты функтора копредела $\varinjlim^{(\mathscr{D}/X)^{op}} : \mathcal{A}^{(\mathscr{D}/X)^{op}} \to \mathcal{A}$, где $\mathscr{D}$ - произвольная малая категория, $\mathcal{A}$ - абелева категория с точными копроизведениями, X - диаграмма множеств над $\mathscr{D}$.

Приведены формулы, сводящие вычисление гомологий $\mathscr{D}$-множества с коэффициентами в контравариантных системах к вычислению гомологий категории $\mathscr{D}^{op}$ (предложение 3.2). Приведено следствие, содержащее двойственное утверждение к предложению 3.2, для ковариантных систем. Приведены примеры показывающие как устроены эти формулы для случая контравариантных и ковариантных систем абелевых групп. Описан метод доказательства предложения 3.2 с общих позиций, с помощью дискретных расслоений Гротендика (замечание 3.3).

Для произвольного морфизма диаграмм множеств $f : X \to Y$ и контравариантной системы F на X приведены формулы преобразования этой контравариантной системы при переходе к прямому образу f_*F на Y (предложение 3.5) и доказано, что гомологии Y с коэффициентами в f_*F изоморфны гомологиям X с коэффициентами в F (теорема 3.6).

Приведен критерий инвариантности гомологий $\mathscr{D}$-множества с коэффициентами в контравариантной системе в $\mathcal{A}$ при переходе е обратному образу для каждой абелевой категории $\mathcal{A}$ (предложение 3.7). Приведены спектральная последовательность для гомологий копредела диаграмм $\mathscr{D}$-множеств, построенная в [43], и обобщенная спектральная последовательность накрытия для морфизма $\mathscr{D}$-множеств, построенная в [44].

В секции 4 строится проективная резольвента ко-кубического объекта $\Delta_{\square}\mathbb{Z}$ в категории $\mathrm{Ab}^{\square}$. Для всякого кубического объекта $F \in \mathcal{A}^{\square^{op}}$ абелевой категории $\mathcal{A}$ точными копроизведениями, тензорное произведение этой резольвенты и кубического объекта F дает комплекс, гомологии которого равны $\varinjlim_n^{\square^{op}} F$, для всех $n \geqslant 0$. Доказывается, что этот комплекс изоморфен нормализованному комплексу кубического объекта F, откуда вытекает, что нормализованные n-е гомологии кубического объекта F изоморфны $\varinjlim_n^{\square^{op}} F$ (теорема 4.5). Приведен пример, показывающий как выглядит нормализованный комплекс для кубической абелевой группы.

Секция 5 посвящена теореме об изоморфизме (нормализованных) гомологий кубического множества с коэффициентами в контравариантых системах гомологиям категории его кубов, а также следствиям этой теоремы. Сначала строятся формулы для построения нормализованного комплекса для контравариантной системы объектов на кубическом множестве. Приводится пример построения этого комплекса для контравариантной системы абелевых групп. Доказано, что n-е гомологии нормализованного комплекса для контравариантной системы G на кубическом множестве X изоморфны $\varinjlim_n^{(\square/X)^{op}} G$ (теорема 5.1). Аналогичное утверждение доказано для когомологий кубических множеств с коэффициентами в ковариантных системах (следствие 5.2). Получена инвариантность гомологий кубического множества с коэффициентами в контравариантной системе при переходе к прямому образу относительно морфизма кубических множеств (следствие 5.3) и критерий инвариантности гомологий при переходе к обратному образу относительно морфизма кубических множеств (следствие 5.4). Спектральная последовательность копредела $\mathscr{D}$-множеств приводит к спектральной последовательности копредела кубических множеств с контравариантными системами (следствие 5.5).

В начале статьи мы ввели определение гомологий категории из книги Габриэля и Цисмана [24] как симплициальные гомологии. Следствие 5.6 показывает, гомологии категории изоморфны кубическим гомологиям. В работе Бауэса и Виршинга [5] были введены когомологии малой категории с коэффициентами в натуральных системах как когомологии косимплициальных абелевых групп. Следствие 5.7 показывает, что эти когомологии можно рассматривать как кубические.

В секции 6 исследуются гомологии и когомологии кубических множеств с коэффициентами в локальных системах. Получен комплекс для гомологий с коэффициентами в локальных системах, в котором цепи при вырожденных кубах равны нулю (теорема 6.2).

Дано короткое введение в тестовые категории Гротендика [34] и напоминается определение стандартной модельной структуры. Доказано, что для слабой эквивалентности относительно стандартной модельной структуры между кубическими множествами $f : X \to Y$ и локальной системы объектов абелевых групп $L : \Box/Y \to \mathrm{Ab}$ существует естественный изоморфизм $H^n(Y, L) \to H^n(X, f^*L)$ групп когомологий Y с коэффициентами в L и групп гомологий X с коэффициентами в обратном образе $f^*L = L \circ \Box/f$ локальной системы в L (следствие 6.3).

Для морфизма кубических множеств $f : X \to Y$, диаграмма обратных слоев которого состоит из слабых эквивалентностей, и локальной системы абелевых групп G на X построена спектральная последовательность связывающая между собой когомологии Y с коэффициентами в локальной системе когомологий обратных слоев морфизма f над Y и когомологии кубического множества X с коэффициентами в G (следствие 6.4).

Секция 7 посвящена гомологиям полукубического множества с коэффициентами в абелевой категории с точными копроизведениями. Строится универсальное кубическое множество, в которое вкладывается полукубическое множество. Показано, что всякая контравариантная система на полукубическом множестве может быть расширено на это универсальное кубическое множество, и гомологии с коэффициентами в контравариантной системе будут изоморфны исходной.

Пусть X - полукубическое множество. Содержащее его универсальное кубическое множество строится как левое расширение Кана функтора X вдоль вложения $J^{op} : \Box_+^{op} \subset \Box^{op}$. Это кубическое множество состоит из копроизведений $(Lan^{J^{op}} X)_n = \coprod_{\mathbb{I}^n \xrightarrow{\gamma} \mathbb{I}^k} X_k$ (предложение 7.2). Доказано, что функтор вложения категории $\Box_+/X$ в категорию $\Box/Lan^{J^{op}} X$ обладает левым сопряженным (предложение 7.6). Откуда следует, что гомологии универсального множества с коэффициентами в контравариантной системе равной композиции $(\Box/Lan^{J^{op}} X)^{op} \xrightarrow{S^{op}} (\Box_+/X)^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$

изоморфны гомологиям полукубического множества X с коэффициентами в F (теорема 7.7).

2 Предварительные сведения

2.1 Обозначения

Будут применяться следующие обозначения:

Set — категория множеств и отображений;

Ab — категория абелевых групп и гомоморфизмов;

pt — категория, состоящая из единственного объекта и единственного морфизма;

in — морфизм конуса копроизведения или мономорфизм в объект;

pr — морфизм конуса произведения или эпиморфизм на объект;

$\mathbb{Z}(-) : \mathrm{Set} \to \mathrm{Ab}$ — функтор, сопоставляющий каждому множеству E свободную абелеву группу $\mathbb{Z}(E)$ с базисом E и каждому отображению $f : E_1 \to E_2$ — канонический продолжающий это отображение гомоморфизм $\mathbb{Z}(f) : \mathbb{Z}(E_1) \to \mathbb{Z}(E_2)$;

$\mathbb{I}$ — линейно упорядоченное множество $\{0, 1\}$ с наименьшим отношением порядка, содержащего пару $0 \leqslant 1$;

$\mathbb{Z}$ — множество или аддитивная группа целых чисел;

$\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

Δ — категория, объектами которой служат конечные линейно упорядоченные множества $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, а множества морфизмов $[m] \to [n]$, для всех $m, n \in \mathbb{N}$, состоят из неубывающих отображений.

Для произвольной категории $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{op}$ обозначается двойственная категория. Для объектов $a, b \in \mathcal{A}$ через $\mathcal{A}(a, b)$ обозначается множество морфизмов $a \to b$.

Если $\mathscr{C}$ — малая категория, то функторы $\mathscr{C} \to \mathcal{A}$ называются диаграммами объектов категории $\mathcal{A}$. В некоторых случаях диаграммы удобно будет обозначать через $\{X^c\}_{c \in \mathscr{C}}$, или коротко $\{X^c\}$, указывая значения X^c этого функтора на объектах $c \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Категории диаграмм и естественных преобразований между ними будет обозначаться через $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$. Предпучком объектов категории $\mathcal{A}$ на $\mathscr{C}$ или $\mathscr{C}$-объектом в $\mathcal{A}$ называется контравариантный функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathcal{A}$.

Пусть $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ - функтор между малыми категориями. Для произвольной категории $\mathcal{A}$ через $(-) \circ S : \mathcal{A}^{\mathscr{D}} \to \mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ мы будем обозначать функтор, сопоставляющий каждому функтору $F : \mathscr{D} \to \mathcal{A}$ функтор $F \circ S : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$. Левый сопряженный функтор к $(-) \circ S$, функтор левого расширения Кана [47], обозначается через $Lan^S : \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \to \mathcal{A}^{\mathscr{D}}$, а правый сопряженный к $(-) \circ S$, правое расширение Кана [47], через Ran_S. Для всякого объекта $d \in \mathscr{D}$ мы называем левым слоем S над d (соответственно правым слоем S под d) и обозначаем через S/d (соответственно d/S) категорию объектов над d (соответственно под d) в смысле [47, Page 45]. Если $S : \mathscr{C} \xrightarrow{\subseteq} \mathscr{D}$ - полное вложение подкатегории, то категория S/d (соответственно d/S) обозначается $\mathscr{C}/d$ (соответственно $d/\mathscr{C}$).

$\Delta_{\mathscr{C}} \mathbb{Z}$ или $\Delta \mathbb{Z}$ обозначает диаграмму абелевых групп $\mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$, принимающую постоянные значения $\mathbb{Z}$ на объектах, и $1_{\mathbb{Z}}$ - на морфизмах.

Под абелевой категорией с точными копроизведениями мы подразумеваем аддитивную категорию, удовлетворяющую аксиомам AB1-AB4 из книги Гротендика [33]. Для абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями и малой категории $\mathscr{C}$ мы рассматриваем левые сателлиты точного справа аддитивного функтора копредела $\varinjlim^{\mathscr{C}} : \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \to \mathcal{A}$, определенные во всех неотрицательных размерностях, в смысле [33, §2.2]. Значения этого сателлита на объектах категории $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ описаны в [24, приложение II].

Под симплициальными множествами мы будем подразумевать функторы $\Delta^{op} \to \mathrm{Set}$. Морфизмами симплициальных множеств будут естественные преобразования.

Объекты категории Δ можно рассматривать как категории, а морфизмы $[m] \to [n]$ – как функторы.

Пусть $\mathscr{C}$ – малая категория. Ее *нервом* $\mathrm{B}\mathscr{C} : \Delta^{op} \to \mathrm{Set}$ называется симплициальное множество, сопоставляющее каждому $[n] \in \Delta$ множество $\mathrm{B}_n\mathscr{C}$ функторов $[n] \to \mathscr{C}$, а морфизму $[m] \to [n]$ – отображение $\mathrm{B}_n\mathscr{C} \to \mathrm{B}_m\mathscr{C}$, действующее на элементах $[n] \to \mathscr{C}$ из $\mathrm{B}_n\mathscr{C}$ как композиция $[m] \to [n] \to \mathscr{C}$.

2.2 Гомологии малых категорий

Мы рассмотрим определение гомологий малых категорий с коэффициентами в диаграммах объектов абелевых категорий с точными копроизведениями, как гомологии комплекса объектов, построенного в книге

[24]. Затем мы укажем метод построения других комплексов, объекты гомологий которых естественно изоморфны гомологиям малых категорий с коэффициентами в этих диаграммах. Это метод необходим для определения гомологий категории кубов.

2.2.1 Цепной комплекс для гомологий малых категорий

Определение 2.1 *Пусть $\mathscr{C}$ - малая категория и пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными копроизведениями. Функторами гомологий категории $\mathscr{C}$ называются левые сателлиты $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} : \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \to \mathcal{A}$ (в смысле [33]) функтора копредела $\varinjlim^{\mathscr{C}} : \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \to \mathcal{A}$. Его значения на $F \in \mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ называются (n-ми) гомологиями категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в F.*

Построим комплекс для вычисления гомологий категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$. Для каждого $n \geqslant 0$ обозначим через

$$C_n(\mathscr{C}, F) = \bigoplus_{c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n} F(c_0)$$

объект, равный копроизведению семейства объектов, индексы которых пробегают все последовательности компонируемых морфизмов длины n. Каждой последовательности n компонируемых морфизмов $s = (c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n)$ соответствуют $(n-1)$-последовательности

$$\delta_i^n(s) = \begin{cases} c_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n, & \text{если } i = 0; \\ c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \to c_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}\alpha_i} c_{i+1} \to \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n, & \text{если } 0 < i < n; \\ c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} c_{n-1}, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Обозначим через $\lambda_{c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \to \xrightarrow{\alpha_n} c_n} : F(c_0) \to \bigoplus_{c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \to \xrightarrow{\alpha_n} c_n} F(c_0)$ морфизмы конуса копроизведения.

Для каждого i из диапозона $1 \leqslant i \leqslant n$ существует единственный морфизм $d_n^i : C_n(\mathscr{C}, F) \to C_{n-1}(\mathscr{C}, F)$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} C_n(\mathscr{C}, F) \arrow[rr, "d_n^i"] & & C_{n-1}(\mathscr{C}, F) \\ & F(c_0) \arrow[ul, "\lambda_{c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \to \xrightarrow{\alpha_n} c_n}"] \arrow[ur, "\lambda_{\delta_i^n(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \to \xrightarrow{\alpha_n} c_n)}"'] & \end{tikzcd}$$

Существует также единственный морфизм $d_n^0 : C_n(\mathscr{C}, F) \to C_{n-1}(\mathscr{C}, F)$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C_n(\mathscr{C}, F) \arrow[r, "d_n^i"] & C_{n-1}(\mathscr{C}, F) \\
F(c_0) \arrow[u, "\lambda_{c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n}"] \arrow[r, "F(\alpha_1)"'] & F(c_1) \arrow[u, "\lambda_{\delta_0^n(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n)}"']
\end{tikzcd}$$

В результате мы получаем цепной комплекс объектов и морфизмов категории $\mathcal{A}$

$$0 \leftarrow C_0(\mathscr{C}, F) \xleftarrow{d_1} C_1(\mathscr{C}, F) \xleftarrow{d_2} \cdots \leftarrow C_{n-1}(\mathscr{C}, F) \xleftarrow{d_n} C_n(\mathscr{C}, F) \leftarrow \cdots ,$$

дифференциалы которого определены по формуле $d_n = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i$. Обозначим этот комплекс через $C_*(\mathscr{C}, F)$. Соответствие $F \mapsto C_*(\mathscr{C}, F)$ будет функтором из категории $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ в категорию цепных комплексов в категории $\mathcal{A}$.

Предложение 2.1 *[24, приложение II, предложение 3.3] Если абелева категория $\mathcal{A}$ имеет точные копроизведения, то для всякой малой категории $\mathscr{C}$ существует единственная последовательность левых сателлитов $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} : \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \to \mathcal{A}$, $n \geqslant 0$, функтора копредела $\varinjlim^{\mathscr{C}} : \mathcal{A}^{\mathscr{C}} \to \mathcal{A}$. Их значения на $F \in \mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ естественно изоморфны объектам гомологий цепного комплекса $C_*(\mathscr{C}, F)$.*

2.2.2 Тензорное произведение диаграмм над малой категорией

Если $\mathcal{A}$ – кополная аддитивная категория, то для любой малой категории $\mathscr{C}$ определен аддитивный по каждому из аргументов бифунктор *тензорного произведения*

$$\otimes : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \times \mathcal{A}^{\mathscr{C}^{op}} \to \mathcal{A},$$

значения которого характеризуется существованием изоморфизмов

$$\mathcal{A}(G \otimes F, A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}(G, Hom(F, A)),$$

естественные по $G \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$, $F \in \mathcal{A}^{\mathscr{C}^{op}}$ и $A \in \mathcal{A}$.

Этот бифунктор обладает следующим свойством: Существует естественный изоморфизм $\xi_c : \mathbb{Z}h^c \otimes F \overset{\cong}{\to} F(c)$. Естественность означает, что для всякого морфизма $\alpha : a \to b$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}h^a \otimes F \arrow[r, "\xi_a"] & F(a) \\ \mathbb{Z}h^b \otimes F \arrow[r, "\xi_b"] \arrow[u, "\mathbb{Z}h^\alpha \otimes 1_F"] & F(b) \arrow[u, "F(\alpha)"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

При фиксированном $F \in \mathcal{A}^{\mathscr{C}^{op}}$ функтор $(-) \otimes F$ перестановочен с копределами. Для всякого $G \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$ функтор $G \otimes (-)$ перестановочен с копределами [45, Лемма 3.2].

2.2.3 Метод построения комплексов для вычисления гомологий категорий

Предложение 2.2 *Пусть* $\mathbb{Z}h^{(-)} : \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$ *– композиция функтора* $\mathbb{Z}(-) : \mathrm{Set} \to \mathrm{Ab}$ *и вложения Ионеды* $h^{(-)} : \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{Set}^{\mathscr{C}}$*. Тогда* $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} \mathbb{Z}h^{(-)} = 0$ *для всех* $n \geqslant 1$*, и* $\varinjlim^{\mathscr{C}^{op}} \mathbb{Z}h^{(-)} = \Delta_{\mathscr{C}} \mathbb{Z}$.

Доказательство. Значения $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} \mathbb{Z}h^{(-)}$ изоморфны объектом гомологий комплекса $C_n(\mathscr{C}^{op}, \mathbb{Z}h^{(-)})$, состоящего из объектов и морфизмов категории $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$. Нам нужно доказать точность последовательности

$$0 \leftarrow \Delta_{\mathscr{C}} \mathbb{Z} \leftarrow \bigoplus_{c_0 \in \mathscr{C}} \mathbb{Z}h^{c_0} \overset{d_1}{\leftarrow} \bigoplus_{c_0 \leftarrow c_1} \mathbb{Z}h^{c_0} \overset{d_2}{\leftarrow} \bigoplus_{c_0 \leftarrow c_1 \leftarrow c_2} \mathbb{Z}h^{c_0} \leftarrow \cdots \tag{2}$$

в категории $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$. Эта последовательность точна тогда и только тогда, когда для каждого $c \in \mathscr{C}$ точна последовательность значений

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \bigoplus_{c_0 \in \mathscr{C}} \mathbb{Z}\mathscr{C}(c_0, c) \overset{(d_1)_c}{\leftarrow} \bigoplus_{c_0 \leftarrow c_1} \mathbb{Z}\mathscr{C}(c_0, c) \overset{(d_2)_c}{\leftarrow} \bigoplus_{c_0 \leftarrow c_1 \leftarrow c_2} \mathbb{Z}\mathscr{C}(c_0, c) \leftarrow \cdots$$

Полученный комплекс будет состоять из свободных абелевых групп с дифференциалами, определенными на базисах этих групп по формуле $(d_n)_c(c_n \to \cdots \to c_0 \to c) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i (c_n \to \cdots \to \widehat{c_i} \to \cdots \to c_0 \to c)$. Здесь $\widehat{c_i}$ обозначает удаление объекта c_i из последовательности морфизмов с последующей заменой, в случае $0 \leqslant i \leqslant n-1$, выходящего из c_i и входящего в c_i морфизмов их композицией. В случае $i = n$ выходящий из c_n морфизм удаляется. Морфизм $(d_0)_c : \bigoplus_{c_0 \in \mathscr{C}} \mathbb{Z}\mathscr{C}(c_0, c) \to \mathbb{Z}$ сопоставляет каждому элементу базиса элемент $1 \in \mathbb{Z}$. Определим теперь гомоморфизмы $s_n : \bigoplus_{c_0 \leftarrow \cdots \leftarrow c_{n-1}} \mathbb{Z}\mathscr{C}(c_0, c) \to \bigoplus_{c_0 \leftarrow \cdots \leftarrow c_n} \mathbb{Z}\mathscr{C}(c_0, c)$, действующими при $n \geqslant 1$ на элементах базисов по формуле $s_n(c_{n-1} \to \cdots \to c_0 \to c) = (c_{n-1} \to \cdots \to c_0 \to c \xrightarrow{1_c} c)$. И определим гомоморфизм $s_0 : \mathbb{Z} \to \bigoplus_{c_0} \mathbb{Z}\mathscr{C}(c_0, c)$, полагая $s_0(1) = (c \xrightarrow{1_c} c)$. Имеют место равенства $(d_0)_c s_0 = 1_{\mathbb{Z}}$ и $(d_{n+1})_c s_{n+1} + s_n(d_n)_c = 1$. Отсюда следует, что s будет гомотопией между тождественным и нулевым морфизмами комплекса в себя. Следовательно, последовательность (2) точна. □

Предложение 2.3 *Для всякой проективной резольвенты $P_* \to \Delta\mathbb{Z}$ в категории $\mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$ имеют место изоморфизмы $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} F \cong H_n(P_* \otimes F)$, естественные по $F \in \mathcal{A}^{\mathscr{C}^{op}}$.*

Доказательство. Подставляя вместо $\mathscr{C}$ двойственную категорию, можно получить функтор $C_*(\mathscr{C}^{op}, -) : \mathcal{A}^{\mathscr{C}^{op}} \to Ch(\mathcal{A})$ в категорию цепных комплексов. Поскольку существует изоморфизм $\mathbb{Z}h^{(-)} \otimes F \xrightarrow{\cong} F(-)$, то имеет место естественный по F изоморфизм комплексов $C_*(\mathscr{C}^{op}, \mathbb{Z}h^{(-)} \otimes F) \xrightarrow{\cong} C_*(\mathscr{C}^{op}, F)$. Комплекс $C_*(\mathscr{C}^{op}, \mathbb{Z}h^{(-)} \otimes F)$ состоит из диаграмм

$$\bigoplus_{c_0 \leftarrow \cdots \leftarrow c_n} \mathbb{Z}h^{c_0} \otimes F \cong (\bigoplus_{c_0 \leftarrow \cdots \leftarrow c_n} \mathbb{Z}h^{c_0}) \otimes F.$$

Отсюда следует, что объекты гомологий комплекса $C_*(\mathscr{C}^{op}, F)$ изоморфны объектам гомологий комплекса, полученного умножением проективной резольвенты (2) диаграммы $\Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$ на диаграмму F

$$0 \leftarrow (\bigoplus_{c_0 \in \mathscr{C}} \mathbb{Z}h^{c_0}) \otimes F \xleftarrow{d_1} (\bigoplus_{c_0 \leftarrow c_1} \mathbb{Z}h^{c_0}) \otimes F \xleftarrow{d_2} (\bigoplus_{c_0 \leftarrow c_1 \leftarrow c_2} \mathbb{Z}h^{c_0}) \otimes F \leftarrow \cdots .$$

Всякая проективная резольвента P_* диаграммы $\Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$ гомотопически эквивалентна резольвенте (2). Отсюда следует, что объекты гомологий $H_n(P_* \otimes F)$ будут изоморфны объектам гомологий комплекса $C_*(\mathscr{C}^{op}, F)$, которые, в сою очередь, изоморфны значениям левых сателлитов $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} F$ функтора копредела. □

Пример 2.2 *Пусть $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ - категория абелевых групп, и $F = \Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$. Согласно предложению 2.3, при $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{op}$, группы гомологий комплекса $C_*(\mathscr{D}, \Delta_{\mathscr{D}}\mathbb{Z})$ будут изоморфны группам гомологий симплициального множества (в смысле [24, приложение II, §1.1]) нерва категории $\mathscr{D}$. Поэтому мы можем обозначать их через $H_n^{simp}(\mathrm{B}\,\mathscr{D})$ или $H_n^{simp}\mathscr{D}$.*

3 Гомологии $\mathscr{D}$-множеств с коэффициентами в контравариантных системах

Пусть $\mathscr{D}$ - малая категория. $\mathscr{D}$-множеством, или предпучком множеств на $\mathscr{D}$, называется функтор $X : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Set}$.

Мы будем рассматривть гомологии $\mathscr{D}$-множеств с коэффициентами в контравариантных системах объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями, где $\mathscr{D}$ - произвольная малая категория.

3.1 Расширение Кана вдоль виртуальных дискретных предрасслоений

Подкатегория называется рефлективной, если функтор ее вложения обладает правым сопряженным [6]. Пусть $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ - функтор между малыми категориями. Будем называть его виртуальным дискретным предрасслоением, если для каждого объекта $d \in \mathscr{D}$ категория d/S содержит дискретную корефлективную подкатегорию. Это будет выполнено тогда и только тогда, когда каждая компонента связности категории d/S имеет инициальный объект.

Пусть K - малая категория, содержащая корефлективную дискретную подкатегорию. Обозначим через $init(K)$ множество объектов этой подкатегории. Для каждого $k \in \mathrm{Ob}K$ обозначим через $i(k)$ инициальный объект компоненты связности, содержащей k, а через $i_k : i(k) \to k$ - единственный морфизм из $i(k)$ в k. ($i : K \to init(K)$ будет функтором, сопряженным справа к вложению $init(K) \subseteq K$).

Предложение 3.1 *[45, лемма 3.6] Пусть $\mathcal{A}$ - категория с копределами, и пусть $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ - виртуальное дискретное расслоение. Тогда для любого функтора $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathcal{A}$ левое расширение Кана $Lan^{S^{op}} : \mathscr{D}^{op} \to \mathcal{A}$ изоморфно функтору, принимающему на объектах $d \in \mathscr{D}$ значения*

$\coprod\limits_{\beta \in init(d/S)} FQ_d^{op}(\beta)$ *и сопоставляющему каждому морфизму* $\alpha : d \to e$ *категории* $\mathscr{D}$ *морфизм* $(Lan^{S^{op}}F)(\alpha)$ *категории* $\mathcal{A}$, *определенный условием коммутативности диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{\gamma \in init(e/S)} FQ_e^{op}(\gamma) \arrow[r, "(Lan^{S^{op}}F)(\alpha)"] & \coprod\limits_{\beta \in init(d/S)} FQ_d^{op}(\beta) \\
FQ_e^{op}(\gamma) = FQ_d^{op}(\gamma \circ \alpha) \arrow[u, "in_\gamma"] \arrow[r, "FQ_d^{op}(i_{\gamma\circ\alpha})"] & FQ_d^{op}(i(\gamma \circ \alpha)) \arrow[u, "in_{i(\gamma\circ\alpha)}"']
\end{tikzcd}$$

Здесь in_γ *обозначают морфизмы конуса копроизведения.*

3.2 Комплексы для вычисления гомологий $\mathscr{D}$-множеств

Пусть $\mathscr{D}$ – малая категория. Рассмотрим произвольный функтор $X : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Set}$. Каждому элементу $x \in \coprod\limits_{d \in Ob\,\mathscr{D}} X(d)$ соответствует естественное преобразование $h_{\mathrm{dom}\,x} \xrightarrow{\widetilde{x}} X$, где $\mathrm{dom}\,x = d$ – объект категории $\mathscr{D}$, для которого $x \in X(d)$. Это естественное преобразование строится с помощью изоморфизма Ионеды $X(d) \cong \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}(h_d, X)$.

Пусть $\mathscr{D}/X$ – категория, объектами которой служат естественные преобразования $h_{\mathrm{dom}\,x} \xrightarrow{\widetilde{x}} X$, а морфизмы $\widetilde{x}_1 \xrightarrow{\alpha} \widetilde{x}_2$ задаются с помощью морфизмов $\alpha \in \mathscr{D}(\mathrm{dom}\,x_1, \mathrm{dom}\,x_2)$, делающих коммутативными треугольники

$$\begin{tikzcd}
h_{\mathrm{dom}\,x_1} \arrow[rr, "\widetilde{x}_1"] \arrow[dr, "h_\alpha"'] & & X \\
& h_{\mathrm{dom}\,x_2} \arrow[ur, "\widetilde{x}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь h_α – естественное преобразование, компоненты которого $(h_\alpha)_d : \mathscr{D}(d, \mathrm{dom}\,x_1) \to \mathscr{D}(d, \mathrm{dom}\,x_2)$ для всех $d \in Ob\,\mathscr{D}$ и $\beta \in \mathscr{D}(d, \mathrm{dom}\,x_1)$ определены по формуле $(h_\alpha)_d(\beta) = \alpha \circ \beta$.

Категория элементов предпучка множеств $X : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Set}$ состоит из множества объектов $x \in \coprod_{d \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}} X(d)$. Ее морфизмами между $x_1, x_2 \in \coprod_{d \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}} X(d)$ служат тройки $x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2$, такие, что $\alpha \in \mathscr{D}(\mathrm{dom}\,x_2, \mathrm{dom}\,x_1)$ и $X(\alpha)(x_1) = x_2$. Мы видим, что всякий морфизм $x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2$ категории элементов равен морфизму $x_1 \xrightarrow{\alpha} X(\alpha)(x_1)$.

Категория элементов предпучка $X : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Set}$ изоморфна категории $(\mathscr{D}/X)^{op}$, и мы будем обозначать эти категории одинаково. Изоморфизм достигается с помощью антиизоморфизма, сопоставляющего каждому морфизму $x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2$ категории элементов морфизм $\tilde{x_2} \xrightarrow{\alpha} \tilde{x_1}$ категории $\mathscr{D}/X$.

Контравариантной системой объектов категории $\mathcal{A}$ на $X \in \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$ называется произвольный функтор $G : (\mathscr{D}/X)^{op} \to \mathcal{A}$.

Пусть $Q_X : \mathscr{D}/X \to \mathscr{D}$ - функтор, сопоставляющий каждому объекту $\tilde{x} : h_{\mathrm{dom}\, x} \in X$ объект $\mathrm{dom}\, x \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{D}$, и каждому морфизму $\tilde{x}_1 \xrightarrow{\alpha} \tilde{x}_2$ - морфизм $\alpha : \mathrm{dom}\, x_1 \to \mathrm{dom}\, x_2$.

Предложение 3.2 *Пусть $\mathcal{A}$ - абелева категория с точными копроизведениями и пусть $G : (\mathscr{D}/X)^{op} \to \mathcal{A}$ - контравариантная система объектов абелевой категории $\mathcal{A}$. Тогда*

1. *Функтор $Lan^{Q_X^{op}} G : \mathscr{D}^{op} \to \mathcal{A}$ принимает на объектах $d \in \mathscr{D}$ значения $\bigoplus_{x \in X(d)} G(x)$, а морфизмы $Lan^{Q_X^{op}} G(\alpha)$, $\alpha \in \mathscr{D}(b, a)$, определены условием коммутативности диаграмм для каждого $x \in \coprod_{d \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{D}} X(d)$*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{z \in X(a)} G(z) \arrow[r, "(Lan^{Q_X^{op}} G)(\alpha)"] & \bigoplus\limits_{z \in X(b)} G(z) \\ G(x) \arrow[u, "in_x"] \arrow[r, "G(x \xrightarrow{\alpha} X(\alpha)(x))"'] & G(X(\alpha)(x)) \arrow[u, "in_{X(\alpha)(x)}"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

2. *Существуют естественные изоморфизмы $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} G \cong \varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} Lan^{Q_X^{op}} G$ для всех $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Согласно [47, §10.3, формула (10)], для всякого функтора $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ между малыми категориями и для произволного функтора $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ в кополную категорию $\mathcal{A}$ значения левого расширения Кана функтора F вдоль функтора S на объектах $d \in \mathscr{D}$ вычисляются по формуле $Lan^S F(d) = \varinjlim^{S/d} F Q_d$, где $Q_d : S/d \to \mathscr{C}$ - забывающий функтор левого слоя функтора S над $d \in \mathscr{D}$. Напомним, что $Q_d(c \in \mathscr{C}, \alpha : S(c) \to d) = c$ на объектах, и $Q_d((c, \alpha) \xrightarrow{\gamma} (c', \alpha')) = (c \xrightarrow{\gamma} c')$ - на морфизмах категории S/d.

Более того, если $\mathcal{A}$ - абелева категория с точными копроизведениями, то аналогичное верно для левых сателлитов расширения Кана:

$$Lan_n^S F(d) = \varinjlim_n^{S/d} FQ_d, \text{для всех } n \geqslant 0$$

[24, Приложение II, замечание 3.8].

Рассмотрим предпучок $X : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Set}$. Пусть $d \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$. Объекты категории d/Q_X состоят из пар морфизмов $(d \xrightarrow{\alpha} Q_X(\tilde{x}), h_{\mathrm{dom}\,x} \xrightarrow{\tilde{x}} X)$. Мы будем обозначать их как пары $(\tilde{x}, \alpha)$. Морфизм $(\tilde{x_1}, \alpha_1) \xrightarrow{\alpha} (\tilde{x_2}, \alpha_2)$ определен морфизмом $\alpha : \mathrm{dom}\,x_1 \to \mathrm{dom}\,x_2$, для которого коммутативен треугольник показанный слева на следующем рисунке:

$$\begin{tikzcd}
 & Q_X(\tilde{x_1}) \arrow[dd, "\alpha"] \\
d \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & \\
 & Q_X(\tilde{x_2})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h_{\mathrm{dom}\,x_1} \arrow[dd, "h_\alpha"'] \arrow[dr, "\tilde{x}_1"] & \\
 & X \\
h_{\mathrm{dom}\,x_2} \arrow[ur, "\tilde{x}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

(Справа показан морфизм $\tilde{x}_1 \xrightarrow{\alpha} \tilde{x}_2$.) Существование морфизма $(\tilde{x}_1, \alpha_1) \xrightarrow{\alpha} (\tilde{x}_2, \alpha_2)$ равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & h_{\mathrm{dom}\,\tilde{x}_1} \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr, "\tilde{x}_1"] & \\
h_d \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & X \\
 & h_{\mathrm{dom}\,\tilde{x}_2} \arrow[ur, "\tilde{x}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Значит, если объекты $(\tilde{x}_1, \alpha_1)$ и $(\tilde{x}_2, \alpha_2)$ принадлежат одной компоненте связности, то $\tilde{x}_1 h_{\alpha_1} = \tilde{x}_2 h_{\alpha_2}$. Отсюда вытекает, что компонента связности категории d/Q_X, содержащая объект $(\tilde{x}, \alpha)$ имеет инициальный объект $(\tilde{x}h_\alpha, 1_d)$. Этот объект равен $\widetilde{X(\alpha)x}$ и значит существует биекция между множеством компонент связности и множеством $X(d)$. Следующая диаграмма иллюстрирует инициальный объект компоненты связности содержащей объект $\tilde{x}, 1_d)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & h_{\mathrm{dom}\,\tilde{x}_1} \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr, "\tilde{x}h_\alpha"] & \\
h_d \arrow[ur, "1_d"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & X \\
 & h_{\mathrm{dom}\,\tilde{x}} \arrow[ur, "\tilde{x}"'] &
\end{tikzcd}
$$

- Объекты $(\tilde{x}_1, \alpha_1)$ и $(\tilde{x}_2, \alpha_2)$ принадлежат одной компоненте связности, если и только если $\tilde{x}_1 h_{\alpha_1} = \tilde{x}_2 h_{\alpha_2}$.

Множество компонент связности равно $init(d/Q_X) = \{(\tilde{x}, 1_d) | x \in X(d)\}$. Обозначим инициальный объект компоненты связности содержащей объект $(\tilde{x}, \alpha)$ через $i(\tilde{x}, \alpha)$, он равен $(1_d, \tilde{x}h_\alpha)$. Существует еднственный морфизм из инициального объекта в объект $(\tilde{x}, \alpha)$. Обозначим его через $i_{(\tilde{x},\alpha)}$.

Для доказательства коммутативности диаграммы (3), воспользуемся предложением 3.1. Рассмотрим функтор $S = Q_X : \mathscr{D}/X \to \mathscr{D}$. Для каждого $d \in \mathscr{D}$ функтор $Q_d : d/Q_X \to \mathscr{D}/X$ сопоставляет каждой паре $(\tilde{z}, \alpha)$ объект $\tilde{z} : h_{\mathrm{dom}\, z} \to X$ из категории $\mathscr{D}/X$. Для каждого морфизма $\alpha : b \to a$ категории $\mathscr{D}$ определим функтор $(-) \circ \alpha : a/Q_X \to b/Q_X$, действующий на объектах как $(\tilde{z}, \alpha') \mapsto (\tilde{z}, \alpha'\alpha)$.

Пусть $\gamma \in init(a/Q_X)$. Это означает существование $z \in X(a)$, такого, что $\gamma = (\tilde{z}, 1_a)$. Верно равенство $FQ_a^{op}(\gamma) = FQ_b^{op}(\gamma \circ \alpha) = FQ_b^{op}(\tilde{z}, \alpha)$. Существует единственный морфизм $i_{(\tilde{z},\alpha)} : (\tilde{z}h_\alpha, 1_b) \to (\tilde{z}, \alpha)$. Для всякого функтора $F : (\mathscr{D}/X)^{op} \to \mathcal{A}$ получаем морфизм $FQ_b^{op}(i_{(\tilde{z},\alpha)}) : FQ_b^{op}(\tilde{z}, \alpha) \to FQ_b^{op}(\tilde{z}h_\alpha, 1_b)$. Этот морфизм равен морфизму в нижней строке диаграммы из предложения 3.1, откуда приходим к коммутативной диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{z \in X(a)} G(\tilde{z}) \arrow[r, "(Lan^{Q_X^{op}} G)(\alpha)"] & \bigoplus\limits_{z \in X(b)} G(\tilde{z}) \\
G(\tilde{x}) \arrow[u, "in_{\tilde{x}}"] \arrow[r, "G(\tilde{x}h_\alpha \xrightarrow{\alpha} \tilde{x})"'] & G(\tilde{x}h_\alpha) \arrow[u, "in_{\tilde{x}h_\alpha}"']
\end{tikzcd}
$$

Полученная коммутативная диаграмма преобразуется в коммутативную диаграмму (3) с помощью использования правила: если функтор G определен на категории элементов, то морфизмы $\tilde{x}_1 \xrightarrow{\alpha} \tilde{x}_2$ из $\mathscr{D}/X$ отождествляются с морфизмами $x_2 \xrightarrow{\alpha} x_1$ из категории элементов. Отсюда следует, что описание морфизма $Lan^{Q_X^{op}}G(\alpha)$ в доказываемом предложении верно.

Осталось доказать изоморфизм $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} G \cong \varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} Lan^{Q_X^{op}} G$. Самый короткий путь - воспользоваться спектральной последовательностью Андре [24, приложение 2, теорема 3.6]

$$E^2_{pq} = \varinjlim_p^{\mathscr{D}^{op}} Lan_q^{Q_X^{op}} G \Rightarrow \varinjlim_{p+q}^{(\mathscr{D}/X)^{op}} G$$

Поскольку каждая компонента связности категории d/Q_X имеет инициальный объект, то каждая компонента связности категории Q_X^{op}/d имеет финальный объект, откуда следует точность функтора $Lan^{Q_X^{op}}$. Следовательно, эта спектральная последовательность вырождается и дает изоморфизмы $\varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} Lan^{Q_X^{op}} G \cong \varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} G$ для всех $n \geqslant 0$. □

Пример 3.1 *В условиях предложения 3.2, рассмотрим случай $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ - категория абелевых групп. Функтор $Lan^{Q_X^{op}} G : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Ab}$ сопоставляет каждому объекту $a \in \mathscr{D}$ прямую сумму абелевых групп $\bigoplus\limits_{z \in X(a)} G(z)$. Он сопоставляет каждому морфизму $\alpha : b \to a$ гомоморфизм*

$$(Lan^{Q_X^{op}} G)(\alpha) : \bigoplus_{z \in X(a)} G(z) \to \bigoplus_{z \in X(b)} G(z),$$

действующий на элементах прямых слагаемых как

$$(x \in X(a), g \in G(x)) \mapsto (X(\alpha)(x), G(x \xrightarrow{\alpha} X(\alpha)(x))(g) \in G(X(\alpha)(x))).$$

Следствие 3.3 *Пусть $\mathcal{A}$ - абелева категория с точными произведениями и пусть $G : \mathscr{D}/X \to \mathcal{A}$ - ковариантная система объектов абелевой категории $\mathcal{A}$. Тогда существует естественные изоморфизмы $\varprojlim^n_{\mathscr{D}/X} G \cong \varprojlim^n_{\mathscr{D}} Ran_{Q_X} G$ для всех $n \geqslant 0$. При этом функтор $Ran_{Q_X} G : \mathscr{D} \to \mathcal{A}$ принимает на объектах $d \in \mathscr{D}$ значения $\prod_{x \in X(d)} G(x)$, а морфизмы $Ran_{Q_X} G(\alpha)$, $\alpha \in \mathscr{D}(b, a)$, определены условием коммутативности диаграмм для каждого $x \in \coprod_{d \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}} X(d)$*

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{z \in X(b)} G(z) \arrow[r, "(Ran_{Q_X} G)(\alpha)"] \arrow[d, "pr_{X(\alpha)x}"'] & \prod\limits_{z \in X(a)} G(z) \arrow[d, "pr_x"] \\ G(X(\alpha)x) \arrow[r, "G(x \xrightarrow{\alpha} X(\alpha)(x))"'] & G(x) \end{tikzcd} \tag{4}$$

Доказательство. В предложении 3.2 подставим $\mathcal{A}^{op}$ вместо $\mathcal{A}$ и G^{op} вместо G. Предложение даст диаграмму и формулы в $\mathcal{A}^{op}$. Преобразование этой диаграммы и формул в диаграмму и формулу в $\mathcal{A}$ приведет к доказываемому следствию. □

Пример 3.2 *Опишем формулу для правого расширения Кана в условиях следствия 3.3 в случае* $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$. *Элементы произведения* $\prod_{z\in X(a)} G(z)$ *будем рассматривать как функции* $\varphi : X(a) \to \cup_{z\in X(a)} G(z)$ *удовлетворяющих условию* $\varphi(z) \in G(z)$. *Проекция действует как* $pr_x(\varphi) = x$. *Получим для* $\psi \in \prod_{z\in X(b)} G(z)$*:*

$$(Ran_{Q_X} G)(\alpha)(\psi)(x) = G(x \xrightarrow{\alpha} X(\alpha)x)(\psi(X(\alpha)x))$$

Замечание 3.3 *Функтор* $Q_X : \mathscr{D}/X \to \mathscr{D}$ *будет дискретным расслоением Гротендика, в котором слой* $Q_X^{-1}(d)$, $d \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, *равен образу вложения* $X(d)$ *в* d/Q_X, *сопоставляющего каждому* $x \in X(d)$ *объект категории* d/Q_X *равный* $(d \xrightarrow{1_d} Q_X(h_d \xrightarrow{\tilde{x}} X))$.

Это свойство функтора Q_X *тоже позволяет доказать предложение 3.2. Существуют и другие проблемы, которые решаются с помощью дискретных расслоений Гротендика [25], [26], [27].*

Для построения коммутативной диаграммы (3) нам проще было использовать свойство существования инициальных объектов в компонентах правых слоев функтора Q_X.

3.3 Гомологии прямого образа контравариантной системы объектов

Пусть $X, Y : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Set}$ – диаграммы множеств. Для произвольного естественного преобразования $f : X \to Y$ обозначим через $\mathscr{D}/f : \mathscr{D}/X \to \mathscr{D}/Y$ функтор, сопоставляющий каждому объекту $h_d \xrightarrow{\tilde{x}} X$ категории $\mathscr{D}/X$ объект категории $\mathscr{D}/Y$ равный композиции $h_d \xrightarrow{f\circ\tilde{x}} Y$. Этот функтор сопоставляет каждому морфизму $(\alpha, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ морфизм $(\alpha : f\circ\widetilde{x}_1 \to f\circ\widetilde{x}_2)$. Объекты категории $\widetilde{y}/(\mathscr{D}/f)$ задаются как пары $(\widetilde{x} \in \mathscr{D}/X, \alpha \in \mathscr{D}(\mathrm{dom}\, y, \mathrm{dom}\, x))$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} h_{\mathrm{dom}\,x} \arrow[d, "\widetilde{x}"'] & h_{\mathrm{dom}\,y} \arrow[l, "h_\alpha"'] \arrow[d, "\widetilde{y}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Морфизмы $(\widetilde{x_1}, \alpha_1) \to (\widetilde{x_2}, \alpha_2)$ задаются морфизмами $\gamma \in \mathscr{D}(\mathrm{dom}\, x_1, \mathrm{dom}\, x_2)$, делающими коммутативными диаграммы

$$\begin{tikzcd}
h_{\mathrm{dom}\, x_1} \arrow[dd, "h_\gamma"'] \arrow[dr, "\widetilde{x}_1"'] & & & \\
& X \arrow[r, "f"] & Y & h_{\mathrm{dom}\, y} \arrow[l, "\widetilde{y}"'] \arrow[ulll, bend right, "h_{\alpha_1}"'] \arrow[dlll, bend left, "h_{\alpha_2}"] \\
h_{\mathrm{dom}\, x_2} \arrow[ur, "\widetilde{x}_2"] & & &
\end{tikzcd}$$

Если существует морфизм $(\widetilde{x_1}, \alpha_1) \to (\widetilde{x_2}, \alpha_2)$, то $\widetilde{x_1} \circ h_{\alpha_1} = \widetilde{x_2} \circ h_{\alpha_2}$. Отсюда вытекает, следующее утверждение

Лемма 3.4 *Для всякого $\widetilde{y} \in Ob(\mathscr{D}/Y)$ компонента связности комма-категории $\widetilde{y}/(\mathscr{D}/f)$, содержащая объект $(\widetilde{x}, \alpha)$, имеет инициальный объект $i(\widetilde{x}, \alpha) = (\widetilde{x} \circ h_\alpha, 1_{\mathrm{dom}\, y})$. Множество инициальных объектов компонент связности $init(\widetilde{y}/(\mathscr{D}/f))$ равно $\{(\widetilde{x}, 1_{\mathrm{dom}\, x}) | \widetilde{x} \in \mathscr{D}/X \ \& \ f \circ \widetilde{x} = \widetilde{y}\}$. Единственный морфизм $i_{(\widetilde{x},\alpha)} : i(\widetilde{x}, \alpha) \to (\widetilde{x}, \alpha)$ задается морфизмом α. Забывающий функтор комма-категории $Q_{\widetilde{y}} : \widetilde{y}/(\mathscr{D}/f) \to \mathscr{D}/X$ действует на объектах как $Q_{\widetilde{y}}(\widetilde{x}, \alpha) = \widetilde{x}$, а на морфизмах – $Q_{\widetilde{y}}((\widetilde{x}_1, \alpha_1) \xrightarrow{\gamma} (\widetilde{x}_2, \alpha_2)) = (\widetilde{x}_1 \xrightarrow{\gamma} \widetilde{x}_2)$.*

Прямым образом контравариантной системы $F : (\mathscr{D}/X)^{op} \to \mathcal{A}$ объектов кополной категории $\mathcal{A}$ на X называется контравариантная система, равная левому расширению Кана $Lan^{(\mathscr{D}/f)^{op}} F$ [47].

Предложение 3.5 *Для произвольных естественного преобразования диаграмм множеств $f : X \to Y$ и контравариантной системы $F : (\mathscr{D}/X)^{op} \to \mathcal{A}$ объектов кополной категории $\mathcal{A}$ прямой образ изоморфен контравариантной системе $f_* F$, принимающей на объектах значения $f_* F(\widetilde{y}) = \coprod\limits_{x \in f^{-1}_{\mathrm{dom}\, y}(y)} F(\widetilde{x})$, а на морфизмах $\widetilde{y} \xrightarrow{\beta} \widetilde{z}$ определенной условием коммута-*

тивности диаграмм

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{x\in f^{-1}_{\mathrm{dom}\,z}(z)} F(\widetilde{x}) \arrow[r, "(f_*F)(\widetilde{y}\xrightarrow{\beta}\widetilde{z})"] & \coprod\limits_{x\in f^{-1}_{\mathrm{dom}\,y}(y)} F(\widetilde{x}) \\
F(\widetilde{x}) \arrow[u, "in_{\widetilde{x}}"] \arrow[r, "F(\widetilde{x}\circ h_\beta\xrightarrow{\beta}\widetilde{x})"'] & F(\widetilde{x}\circ h_\beta) \arrow[u, "in_{\widetilde{x}\circ h_\beta}"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Множество $init(\widetilde{y}/(\mathscr{D}/f))$ состоит из пар $(\widetilde{x}, 1_{\mathrm{dom}\,y})$, удовлетворяющих условию $f\circ\widetilde{x}=\widetilde{y}$, равносильному $x\in f^{-1}_{\mathrm{dom}\,y}(y)$. Отсюда лемма 3.4 о строении комма-категории вместе с предложением 3.1 приводят к изоморфизму прямого образа и функтора, принимающего на объектах $\widetilde{y}\in\mathscr{D}/Y$ значения $\coprod\limits_{x\in f^{-1}_{\mathrm{dom}\,y}(y)} FQ^{op}_{\widetilde{y}}(\widetilde{x}, 1_{\mathrm{dom}\,y}) = \coprod\limits_{x\in f^{-1}_{\mathrm{dom}\,y}(y)} F(\widetilde{x})$. Диаграмма из предложения 3.1 для определения действия левого расширения Кана функтора F на морфизмах приводит к диаграмме, определяющей функтор f_*F. Отсюда следует, что построенный функтор f_*F будет изоморфен функтору $Lan^{(\mathscr{D}/f)^{op}}F$. □

Теорема 3.6 *Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными копроизведениями, $\mathscr{D}$ – малая категория, $f: X\to Y$ – морфизм между $X, Y\in \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$. Тогда для произвольного функтора $F:(\mathscr{D}/X)^{op}\to\mathcal{A}$ существуют естественные изоморфизмы $\varinjlim\nolimits_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F \xrightarrow{\cong} \varinjlim\nolimits_n^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} f_*F$.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Андре, описанную в [24, приложение 2, теорема 3.6], примененную к функтору $(\mathscr{D}/f)^{op}:(\mathscr{D}/X)^{op}\to(\mathscr{D}/Y)^{op}$:

$$E^2_{p,q} = \varinjlim\nolimits_p^{(\mathscr{D}/Y)^{op}}(Lan_q^{(\mathscr{D}/f)^{op}}F) \Rightarrow \varinjlim\nolimits_{p+q}^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F.$$

Используя [24, приложение 3, замечание 3.8], получим $(Lan_q^{(\mathscr{D}/f)^{op}}F)(\widetilde{y}) \cong \varinjlim\nolimits_q^{(\widetilde{y}/(\mathscr{D}/f))^{op}} F\circ Q^{op}_{\widetilde{y}}$. Каждая компонента связности категории $(\widetilde{y}/(\mathscr{D}/f))^{op}$ имеет терминальный объект, откуда следует, что функтор копредела по этой категории точен. Получаем $(Lan_q^{(\mathscr{D}/f)^{op}}F)(\widetilde{y})=0$, при $q>0$. Отсюда спектральная последовательность вырождается в строку $E^2_{p,0}$. Это приводит к изоморфизмам $\varinjlim\nolimits_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F \xrightarrow{\cong} \varinjlim\nolimits_n^{(\mathscr{D}/Y)^{op}}(Lan^{(\mathscr{D}/f)^{op}}F)$. Согласно предложению 3.5 имеет место изоморфизм $Lan^{(\mathscr{D}/f)^{op}} F \cong f_* F$. Приходим к изоморфизму $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F \xrightarrow{\cong} \varinjlim_n^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} f_* F$. $\square$

3.4 Критерий изоморфизма гомологий $\mathscr{D}$-множеств

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм $\mathscr{D}$-множеств. Функтор $\mathscr{D}/f : \mathscr{D}/X \to \mathscr{D}/Y$ сопоставляет каждому объекту $\widetilde{x} : h_d \to X$ композицию $f \circ \widetilde{x} : h_d \to Y$. Пусть $f^* : \mathcal{A}^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} \to \mathcal{A}^{(\mathscr{D}/X)^{op}}$ – функтор, сопоставляющий каждому функтору $F : (\mathscr{D}/Y)^{op} \to \mathcal{A}$ композицию $F \circ (\mathscr{D}/f)^{op}$. Поскольку функторы $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} : \mathcal{A}^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} \to \mathcal{A}$ являются сателлитами функтора копредела, то существует единственная последовательность канонических морфизмов, составляющих морфизм ∂-функтора $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F \circ (\mathscr{D}/f)^{op} \to \varinjlim_n^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} F$. Возникает вопрос: когда эти морфизмы будут изоморфизмами? Для того, чтобы дать ответ, воспользуемся теоремой Оберста [52, Theorem 2.3].

Пусть $\overleftarrow{f}(y)$ – $\mathscr{D}$-множество, определенное с помощью декартова квадрата в категории $\mathscr{D}$-множеств

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow{\scriptstyle f_y} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{y}} \\ \overleftarrow{f}(y) & \longrightarrow & h_d^{\mathscr{D}} \end{array} \qquad (5)$$

Это $\mathscr{D}$-множество $\overleftarrow{f}(y)$ называется *обратным слоем* над элементом $y \in Y(d)$. Легко видеть, что имеет место изоморфизм категорий $(\square/f)/\widetilde{y} \cong \mathscr{D}/\overleftarrow{f}(y)$. Применяя теорему Оберста приходим к следующему ниже утверждению. Группы $H_n^{simp}\mathscr{C}$ определены в примере 2.2.

Предложение 3.7 *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм $\mathscr{D}$-множеств. Тогда следующие свойства морфизма f равносильны:*

1. *Для каждого $y \in Y$ категория $\mathscr{D}/\overleftarrow{f}(y)$ связна и группы гомологий $H_n^{simp}(\mathscr{D}/\overleftarrow{f}(y))$ равны нулю для всех $n > 0$*
2. *Канонические гомоморфизмы $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} f^* F \to \varinjlim_n^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} F$ являются изоморфизмами для всякого функтора $F : (\mathscr{D}/Y)^{op} \to \mathrm{Ab}$.*

3. *Канонические морфизмы* $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} f^*F \to \varinjlim_n^{(\mathscr{D}/Y)^{op}} F$ *являются изоморфизмами для всякого функтора* $F : (\mathscr{D}/Y)^{op} \to \mathcal{A}$ *в произвольную абелеву категорию* $\mathcal{A}$ *с точными копроизведениями.*

3.5 Спектральная последовательность копредела $\mathscr{D}$-множеств

Найдем условия для диаграмм $\mathscr{D}$-множеств, при которых существует спектральная последовательность сходящаяся к гомологиям копредела этой диаграммы. Полученная спектральная последовательность является обобщением спектральной последовательности Картана-Лере.

Этим условиям удовлетворяет диаграмма слоев морфизма $\mathscr{D}$-множеств, что позволяет применить их также при построении спектральной последовательности расслоения.

Мы будем рассматривать спектральные последовательности первой четверти, в смысле [48]. Следующее утверждение является двойственным к следствию [43, Следствие 2.4], полученному с помощью [43, Теорема 2.1]. Вместо абелевой категории с точными произведениями надо подставить категорию $\mathcal{A}^{op}$.

Предложение 3.8 *Пусть* J *– малая категория, и пусть* $\{X^i\}_{i\in J}$ *— такая диаграмма* $\mathscr{D}$*-множеств, что*

$$\varinjlim_q^J \{\mathbb{Z}(X^i(d))\}_{i\in J} = 0, \text{ для любых } d \in \operatorname{Ob}\mathscr{D} \text{ и } q > 0. \qquad (6)$$

Пусть $\lambda_i : X^i \to \varinjlim^J \{X^i\}_{i\in J}$ *— конус морфизмов копредела* $\mathscr{D}$*-множеств. Тогда для всякой абелевой категории с точными копроизведениями* $\mathcal{A}$ *и любой контравариантной системы* $F : (\mathscr{D}/\varinjlim^J\{X^i\})^{op} \to \mathcal{A}$ *существует спектральная последовательность первой четверти*

$$E^2_{p,q} = \varinjlim_p^J \{\varinjlim_q^{(\mathscr{D}/X^i)^{op}} \lambda_i^* F\}_{i\in J} \Rightarrow \{\varinjlim_{p+q}^{(\mathscr{D}/\varinjlim^J\{X^i\})^{op}} F\}.$$

3.6 Спектральная последовательность морфизма $\mathscr{D}$-множеств

Пусть $f : X \to Y$ — морфизм $\mathscr{D}$-множеств. Для каждого $\sigma \in \mathscr{D}/Y$ декартов квадрат (5) определяет обратный слой над σ и морфизм $f_\sigma : \overleftarrow{f}(\sigma) \to X$. Обратные слои над элементами из Y составляют диаграмму

$\mathscr{D}$-множеств $\{\overleftarrow{f}(\sigma)\}_{\sigma\in\mathscr{D}/Y}$, копредел которой изоморфен X. Применяя общий результат о спектральной последовательности морфизма [44, Теорема 4.1], где вместо категории $\mathcal{A}$ нужно взять категорию Ab^{op}, получаем следующее утверждение:

Предложение 3.9 *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм $\mathscr{D}$-множеств, F – контравариантная система объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями на X. Тогда существует спектральная последовательность первой четверти*

$$E^2_{p,q} = \varinjlim\nolimits_p^{\mathscr{D}/Y}\{\varinjlim\nolimits_q^{(\mathscr{D}/\overleftarrow{f}(\sigma))^{op}} f^*_\sigma F\}_{\sigma\in\mathscr{D}/Y} \Rightarrow \{\varinjlim\nolimits_{p+q}^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F\}.$$

Замечание 3.4 *Если некоторая диаграмма $G : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ состоит из изоморфизмов, то, обращая ее морфизмы, мы получим диаграмму на $\mathscr{C}^{op}$. Обозначим ее через $G^{-1} : \mathscr{C}^{op} \to \mathcal{A}$. В этом случае существуют изоморфизмы $\varinjlim\nolimits_n^{\mathscr{C}} G \cong \varinjlim\nolimits_n^{\mathscr{C}^{op}} G^{-1}$ [24, приложение II, предложение 4.4]. В частности, если диаграмма $\{\varinjlim\nolimits_q^{(\mathscr{D}/\overleftarrow{f}(\sigma))^{op}} f^*_\sigma F\}_{\sigma\in\mathscr{D}/Y}$ состоит из изоморфизмов, то, обращая эти изоморфизмы, получим диаграмму $\{\varinjlim\nolimits_q^{(\mathscr{D}/\overleftarrow{f}(\sigma))^{op}} f^*_\sigma F\}^{-1}_{\sigma\in\mathscr{D}/Y}$. Предложение 3.9 приводит к спектральной последовательности*

$$E^2_{p,q} \cong \varinjlim\nolimits_p^{(\mathscr{D}/Y)^{op}}\{\varinjlim\nolimits_q^{(\mathscr{D}/\overleftarrow{f}(\sigma))^{op}} f^*_\sigma F\}^{-1}_{\sigma\in\mathscr{D}/Y} \Rightarrow \{\varinjlim\nolimits_{p+q}^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F\},$$

связывающей объекты гомологий $\mathscr{D}$-множеств X и Y.

4 Гомологии категории кубов

Рассмотрим категорию кубов и изучим значения левых сателлитов функтора копредела $\varinjlim\nolimits_n^{\square^{op}} F$ на кубических объектах абелевой категории с точными копроизведениями.

4.1 Категория кубов

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ будем рассматривать частично упорядоченное множество $\mathbb{I}^n = \{0,1\}^n$, равное декартовой степени линейно упорядоченного множества $\mathbb{I} = \{0,1\}$. При $n = 0$ множество $\mathbb{I}^0$ состоит из единственного элемента $\emptyset$. Частично упорядоченное множество $\mathbb{I}^n$ называется n-мерным *кубом.*

Объектами *категории кубов* $\square$ служат кубы $\mathbb{I}^0$, $\mathbb{I}^1$, $\mathbb{I}^2$. ....

Морфизмы категории кубов $\square$ определяются как неубывающие отображения этих частично упорядоченных множеств, допускающих разложение в композицию отображений вида $\delta_i^{k,\varepsilon} : \mathbb{I}^{k-1} \to \mathbb{I}^k$ и $\sigma_i^k : \mathbb{I}^k \to \mathbb{I}^{k-1}$, определенных при $k \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, и принимающих значения

$$\delta_i^{k,\varepsilon}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \ldots, x_{k-1}), \tag{7}$$

$$\sigma_i^k(x_1, \cdots, x_k) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_k). \tag{8}$$

В частности, $\delta_1^{1,0}(\emptyset) = 0$, $\delta_1^{1,1}(\emptyset) = 1$, $\sigma_1^1(x_1) = \emptyset$, для всех $x_1 \in \mathbb{I}$.

Описание категории кубов дано в работах [39], [8]. В работе [8] ее объектами являются кубы $[0,1]^n$. Работе [39] приведены коммутативные диаграммы, иллюстрирующие соотношения, с помощью которых можно задать категорию $\square$.

Имеют место соотношения

$$\delta_j^{n,\beta}\delta_i^{n-1,\alpha} = \delta_i^{n,\alpha}\delta_{j-1}^{n-1,\beta} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n, \alpha \in \mathbb{I}, \beta \in \mathbb{I}); \tag{9}$$

$$\sigma_j^{n-1}\sigma_i^n = \sigma_i^{n-1}\sigma_{j+1}^n \quad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1, n \geqslant 2); \tag{10}$$

$$\sigma_j^{n+1}\delta_i^{n+1,\alpha} = \begin{cases} \delta_i^{n,\alpha}\sigma_{j-1}^n, & (1 \leqslant i < j \leqslant n+1, \alpha \in \{0,1\}), \\ \delta_{i-1}^{n,\alpha}\sigma_j^n, & (1 \leqslant j < i \leqslant n+1, \alpha \in \{0,1\}), \\ 1_{\mathbb{I}^n}, & i = j. \end{cases} \tag{11}$$

Согласно [30, Lemma 4.1], каждый морфизм этой категории $f : \mathbb{I}^k \to \mathbb{I}^n$ допускает каноническое разложение в композицию

$$f = \delta_{j_1}^{n,\varepsilon_1} \cdots \delta_{j_s}^{k-r+1,\varepsilon_s}\sigma_{i_1}^{k-r+1} \cdots \sigma_{i_r}^k, \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k, \\ n \geqslant j_1 > \cdots > j_s \geqslant 1, \\ k-r = n-s \geqslant 0. \end{array} \tag{12}$$

4.2 Кубические множества

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная категория. *Кубическим объектом* в категории $\mathcal{A}$ называется функтор $X : \square^{op} \to \mathcal{A}$. *Кубическим множеством* называется функтор $X : \square^{op} \to \mathrm{Set}$.

Категория $\square$ может быть задана с помощью *графа с соотношениями*, в смысле [6]. Этот граф имеет вершины $\mathbb{I}^n$, где n пробегает все целые неотрицательные числа. Его ребрами служат *граничные морфизмы* $\mathbb{I}^{n-1} \stackrel{\delta_i^{n,\varepsilon}}{\to} \mathbb{I}^n$ и *морфизмы вырождения* $\mathbb{I}^n \stackrel{\sigma_i^n}{\to} \mathbb{I}^{n-1}$, где индексы пробегают значения $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Соотношения даны выше (9)-(11).

Кубический объект $X : \square^{op} \to \mathcal{A}$ можно задать как набор объектов $X_n = X(\mathbb{I}^n)$, $n \geqslant 0$, и набор морфизмов $\partial_i^{n,\varepsilon} = X(\delta_i^{n,\varepsilon}) : X_n \to X_{n-1}$, $s_i^n = X(\sigma_i^n) : X_{n-1} \to X_n$, а также набор коммутативных диаграмм, соответствующих соотношениям (9)-(11).

Морфизмы $\partial_i^{n,\varepsilon}$ называются *граничными операторами*, а s_i^n – *операторами вырождения.*

4.3 Невырожденные кубики стандартного куба

Пусть $(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon}, s_i^n)$ – кубическое множество. Кубик $x \in X_n$ называется *вырожденным*, если существует такие $y \in X_{n-1}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $s_i^n(y) = x$. В противном случае он называется *невырожденным.*

Пусть $h_{\mathbb{I}^n} : \square^{op} \to \mathrm{Set}$ – функтор морфизмов, он действует на объектах как $h_{\mathbb{I}^n}(\mathbb{I}^k) = \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n)$, и каждому морфизму $f : \mathbb{I}^m \to \mathbb{I}^k$ он сопоставляет естественное преобразование $\square(f, \mathbb{I}^n) : \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n) \to \square(\mathbb{I}^m, \mathbb{I}^n)$, сопоставляющее каждому $g \in \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n)$ элемент $gf \in \square(\mathbb{I}^m, \mathbb{I}^n)$. Функтор $h_{\mathbb{I}^n}$ является кубическим множеством и называется *стандартным кубом.* Стандартный куб можно задать как тройку $(X_k, \partial_i^{k,\varepsilon}, s_i^k)$, состоящую из последовательности множеств $X_k = \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n)$ месте с отображениями $\partial_i^{k,\varepsilon}(f) = f\delta_i^{k,\varepsilon}$ и $s^k(g) = g\sigma_i^k$.

Согласно определению вырожденного кубика, кубик $f \in h_{\mathbb{I}^n}(\mathbb{I}^k)$ будет тогда и только вырожденным, когда существуют $g : \mathbb{I}^{k-1} \to \mathbb{I}^n$ и i из интервала $1 \leqslant i \leqslant k$, такие, что $f = g\sigma_i^k$.

Предложение 4.1 *[35, Proposition 3] Для всякого $n \geqslant 0$ куб $f \in h_{\mathbb{I}^n}(\mathbb{I}^k)$ будет тогда и только тогда невырожденным, когда отображение $f : \mathbb{I}^k \to \mathbb{I}^n$ является инъекцией.*

4.4 Построение проективной резольвенты

Рассмотрим последовательность морфизмов в категории $\mathrm{Ab}^{\square}$

$$0 \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^0} \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^1} \xleftarrow{d_2} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^2} \xleftarrow{d_3} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^3} \leftarrow \cdots \tag{13}$$

состоящий из кокубических абелевых групп и естественных преобразований $d_k = \sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^i(\partial_i^{k,0} - \partial_i^{k,1})$. Здесь $\partial_i^{k,\varepsilon} : \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k} \to \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^{k-1}}$ – естественные преобразования, компоненты которых $(\partial_i^{k,\varepsilon})_{\mathbb{I}^n} : \mathbb{Z}\square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n) \to$

$\mathbb{Z}\square(\mathbb{I}^{k-1}, \mathbb{I}^n)$ на объектах $\mathbb{I}^n \in \square$ определены на элементах базиса $f \in \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n)$ по формуле $(\partial_i^{k,\varepsilon})_{\mathbb{I}^n}(f) = f\delta_i^{k,\varepsilon}$. Из соотношений $\partial_i^{k-1,\alpha}\partial_j^{k,\beta} = \partial_{j-1}^{k-1,\beta}\partial_i^{k,\alpha}$, вытекающих из равенства (9), будет следовать выполнение $d_k d_{k+1} = 0$, для всех $k \geqslant 0$. Следовательно, последовательность морфизмов (13) является цепным комплексом.

Для каждого $n \geqslant 0$ рассмотрим подмножество $D_k(\mathbb{I}^n) \subseteq \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n)$, состоящее из вырожденных кубиков кубического множества $h_{\mathbb{I}^n}$. Морфизмы $\square(\mathbb{I}^k, \delta_i^{n,\varepsilon})$ и $\square(\mathbb{I}^k, \sigma_i^n)$ переводят вырожденные кубики в вырожденные, откуда D_k будет подфунктором функтора $h^{\mathbb{I}^k}$. Рассмотрим вложение функторов $\mathbb{Z}D_k \subseteq \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}$, для произвольного $k \geqslant 0$. Коядро этого вложения будет функтором $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$, принимающим на объектах значения равные фактор-группам $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n)/\mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)$. Компоненты проекции $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k} \to \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$ равны проекциям на фактор-группы.

Существует точная последовательность в $\mathrm{Ab}^{\square}$

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k \xleftarrow{pr} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k} \xleftarrow{\supseteq} \mathbb{Z}D_k \leftarrow 0. \tag{14}$$

Лемма 4.2 *[35, Lemma 4] Функтор $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$ является проективным объектом категории $\mathrm{Ab}^{\square}$, для всех целых $k \geqslant 0$.*

Доказательство. В работе [35] дано доказательство, содержащее пробелы в утверждении о естественности сечения отображений $pr_{\mathbb{I}^n}$. Для того, чтобы исправить это, построим естественное преобразование $r : \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k} \to \mathbb{Z}D_k$, обратное слева к вложению $\mathbb{Z}D_k \subseteq \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}$. По лемме Ионеды, для того, чтобы построить r, достаточно указать элемент $z = r_{\mathbb{I}^k}(1_{\mathbb{I}^k}) \in \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^k)$. И тогда естественное преобразование r будет иметь компоненты $r_{\mathbb{I}^n}(\alpha) = \alpha \circ z$, для всех $n \geqslant 0$ и $\alpha \in \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n)$. Прибегая к идее Эйленберга и Маклейна, используемой в [20, Prop. 7.2] при доказательстве представимости нормализованных групп сингулярных кубических гомологий, положим

$$z = 1 - (1 - \delta_1^{k,0}\sigma_1)(1 - \delta_2^{k,0}\sigma_2)\cdots(1 - \delta_k^{k,0}\sigma_k).$$

Этот z равен линейной комбинвции композиций $\delta_{s_1}^{k,0}\sigma_{s_1}\delta_{s_2}^{k,0}\sigma_{s_2}\cdots\delta_{s_m}^{k,0}\sigma_{s_m}$ для некоторых $1 \leqslant m \leqslant k$ и $s_1 < \ldots < s_m$. Каждая из таких композиций не является мономорфизмом ибо иначе морфизм σ_{s_m} был бы мономорфизмом. Значит z равен линейной комбинации вырожденных морфизмов, и он принадлежит $\mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^k)$. Следовательно, для любых $n \geqslant 0$ и $\alpha \in \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n)$ элемент $r_{\mathbb{I}^n}(\alpha) = \alpha z$ принадлежит $\mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)$.

Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant k$ операции $\delta_i^{k,0}\sigma_i^k$ и $\delta_j^{k,0}\sigma_j^k$ перестановочны. Если $\alpha \in D^k(\mathbb{I}^n)$, то $\alpha = x\sigma_i$, для некоторых $1 \leqslant i \leqslant k$ и $x \in h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n)$. В силу замеченного свойства перестановочности, $z = 1 - (1 - \delta_i^{k,0}\sigma_i)y$ для некоторого $y \in \square(\mathbb{I}^k, \mathbb{I}^k)$. Откуда

$$x\sigma_i^k \circ z = x\sigma_i^k(1 - (1 - \delta_i^{k,0}\sigma_i^k)y) = x\sigma_i^k,$$

и значит $r_{\mathbb{I}^n}(\alpha) = \alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)$.

Следовательно, r - ретракция $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}$ на $\mathbb{Z}D_k$, и короткая точная последовательность (14) расщепляется. Так как $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}$ проективный объект в $\mathrm{Ab}^{\square}$, то $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$ - проективен.

Сечение $s : \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k \to \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}$ естественного преобразования pr определяется по $r : \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k} \to \mathbb{Z}D_k$ стандартно [48, §I.4], по формуле

$$s_{\mathbb{I}^n}(\alpha + \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)) = \alpha - \alpha z.$$

$\square$

Замечание 4.1 *Соотношения между морфизмами категории кубов, участвующие в доказательстве проективности функторов $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$, использовались в работе A. Świątec [57] для изучения кубических объектов абелевой категории и И. Пачкории [53] для изучения псевдокубических объектов идемпотентно полной предаддитивной категории.*

Замечание 4.2 *Мы получили формулы для естественных по $\mathbb{I}^n$ проекций и вложений*

$$\mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n) \underset{\subseteq}{\overset{r_{\mathbb{I}^n}}{\leftrightarrows}} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n) \underset{s_n}{\overset{\pi_n}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n) \qquad (15)$$

где $r_{\mathbb{I}^n}(\alpha) = \alpha z$, $\pi_n(\alpha) = \alpha - \alpha z + \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n) = \alpha + \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)$, $s_n(\alpha + \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)) = \alpha - \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n)$. Мы доказали, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)$ верно $r_{\mathbb{I}^n}(\alpha) = \alpha$.

Корректность отображения s_n:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n) = \alpha_2 + \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n) &\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n) \\ &\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)z = \alpha_1 - \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_1 z = \alpha_2 - \alpha_2 z. \end{aligned}$$

Проекции и вложения (15) приводят к разложению свободной кокубической абелевой группы $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}$ в прямую сумму $\mathbb{Z}D_k$ и $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$.

Построим проективную резольвенту объекта $\Delta_\Box \mathbb{Z} \in \mathrm{Ab}^\Box$. С этой целью рассмотрим гомоморфизмы $(d_k)_{\mathbb{I}^n} : \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n) \to \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^{k-1}}(\mathbb{I}^n)$, сопоставляющие элементам $f \in h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n)$ суммы $\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^i(f \circ \delta_i^{k,0} - f \circ \delta_i^{k,1})$. Для произвольного $f \in D_k(\mathbb{I}^n)$, при $k \geqslant 1$, существуют такие морфизм $g : \mathbb{I}^{k-1} \to \mathbb{I}^n$ и номер j из диапазона $1 \leqslant j \leqslant k$, что $f = g \circ \sigma_j^k$. Для произвольного $1 \leqslant i \leqslant k$ будем иметь равенство $f\delta_i^{k,\varepsilon} = g\sigma_j^k\delta_i^{k,\varepsilon}$. В силу формул (11) при $i < j$ будет иметь место $g\sigma_j^k\delta_i^{k,\varepsilon} = g\delta_i^{k-1,\varepsilon}\sigma_{j-1}^{k-1} \in D_{k-1}(\mathbb{I}^n)$. Аналогично при $i > j$, $g\sigma_j^k\delta_i^{k,\varepsilon} \in D_{k-1}(\mathbb{I}^n)$. Если же $i = j$, то $g\sigma_j^k\delta_i^{k,\varepsilon} = g$, и, вместе с тем, $f \circ \delta_i^{k,0} - f \circ \delta_i^{k,1} = g - g = 0$. Отсюда вытекает, что гомоморфизмы $(d_k)_{\mathbb{I}^n}$ переводят элементы из $\mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)$ в элементы из $\mathbb{Z}D_{k-1}(\mathbb{I}^n)$.

Следовательно, кокубические абелевы группы $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$ будут составлять цепной комплекс, дифференциалы которого $\overline{d}_k$ имеют компоненты, определенные на классах смежности по подгруппам $\mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n) \subseteq \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}(\mathbb{I}^n)$ по формуле

$$(\overline{d}_k)_{\mathbb{I}^n}(f + \mathbb{Z}D_k(\mathbb{I}^n)) = (d_k)_{\mathbb{I}^n}(f) + \mathbb{Z}D_{k-1}(\mathbb{I}^n).$$

Поскольку $D_0(\mathbb{I}^n) = \emptyset$, то $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^0}/\mathbb{Z}D_0 = \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^0}$.

Лемма 4.3 *[35, Lemma 5] Для каждого $n \geqslant 0$ комплекс абелевых групп*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^0}/\mathbb{Z}D_0(\mathbb{I}^n) \stackrel{(\overline{d}_1)_{\mathbb{I}^n}}{\longleftarrow} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^1}/\mathbb{Z}D_1(\mathbb{I}^n) \stackrel{(\overline{d}_2)_{\mathbb{I}^n}}{\longleftarrow} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^2}/\mathbb{Z}D_2(\mathbb{I}^n) \stackrel{(\overline{d}_3)_{\mathbb{I}^n}}{\longleftarrow} \cdots .$$

изоморфен комплексу C_*, построенному в [45], состоящему из абелевых групп и гомоморфизмов

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}\Box_+(\mathbb{I}^0, \mathbb{I}^n) \stackrel{d_1^+}{\leftarrow} \mathbb{Z}\Box_+(\mathbb{I}^1, \mathbb{I}^n) \stackrel{d_2^+}{\leftarrow} \cdots \stackrel{d_n^+}{\leftarrow} \mathbb{Z}\Box_+(\mathbb{I}^n, \mathbb{I}^n) \leftarrow 0.$$

И значит она точна.

Определим естественное преобразование $\epsilon : \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^0} \to \Delta_\Box \mathbb{Z}$, как имеющее компоненты $\epsilon_{\mathbb{I}^n} : \mathbb{Z}\Box(\mathbb{I}^0, \mathbb{I}^n) \to \mathbb{Z}$ принимающие на элементах базиса $x \in \Box(\mathbb{I}^0, \mathbb{I}^n)$ значения $\epsilon_{\mathbb{I}^n}(x) = 1$.

Предложение 4.4 *Последовательность объектов и естественных преобразований в категории $\mathrm{Ab}^\Box$*

$$0 \leftarrow \Delta_\Box \mathbb{Z} \stackrel{\epsilon}{\leftarrow} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^0}/\mathbb{Z}D_0 \stackrel{d_1}{\leftarrow} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^1}/\mathbb{Z}D_1 \stackrel{d_2}{\leftarrow} \mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^2}/\mathbb{Z}D_2 \leftarrow \cdots$$

является проективной резольвентой диаграммы $\Delta_\Box \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из леммы 4.3 следует, что эта последовательность точна. По лемме 4.2, кубические абелевы группы $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$ будут проективными объектами категории $\mathrm{Ab}^{\Box}$. Следовательно, эта точная последовательность будет проективной резольвентой. $\Box$

4.5 Гомологии кубических объектов абелевой категории с точными копроизведениями

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория. Рассмотрим произвольный кубический объект $F : \Box^{op} \to \mathcal{A}$. Сначала мы введем его ненормализованный комплекс. Если $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ - категория абелевых групп, то нормализованный комплекс будет состоять из фактор-групп $F(\mathbb{I}^k)$ по подгруппам, порожденным вырожденными элементами.

Фактор-объект в абелевой категории можно построить как коядро вложения подобъекта. Эта конструкция даст нормализованный комплекс в $\mathcal{A}$.

Пусть A и B - объекты абелевой категории. Для всякого морфизма $f : A \to B$ обозначим через $\mathrm{Coker}\,(f)$ его коядро (соотв. через $\mathrm{Ker}\,(f)$ его ядро), и через $coker(f) : B \to \mathrm{Coker}\,(f)$ - каноническую проекцию на коядро (соотв. $ker(f) : \mathrm{Ker}\,(f) \to A$ - каноническое вложение ядра).

Для любого объекта A абелевой категории и $n \geqslant 0$ обозначим через A^n копроизведение n копий $A \oplus \cdots \oplus A$ объекта A. Пусть $in_i : A \to A^n$ – морфизмы конуса копроизведения, $1 \leqslant i \leqslant n$. Для произвольных двух объектов A, B и морфизмов $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}(A, B)$ абелевой категории обозначим через $(f_1, \ldots, f_n) : A^n \to B$ морфизм, для которого $(f_1, \ldots, f_n) \circ in_i = f_i$, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $\mathrm{Coker}\,(A^n \stackrel{(f_1,\ldots,f_n)}{\longrightarrow} B)$ – коядро этого морфизма, а $coker(f_1, \ldots, f_n) : B \to \mathrm{Coker}\,(A^n \stackrel{(f_1,\ldots,f_n)}{\longrightarrow} B)$ – каноническая проекция. Например, в случае $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ группа $\mathrm{Coker}\,(f_1, \ldots, f_n)$ будет изоморфна фактор группе $B/(\mathrm{Im}\,(f_1) + \ldots + \mathrm{Im}\,(f_n))$.

Перед определением нормализованного комплекса кубического объекта F абелевой категории, заметим, что построение проективной резольвентой диаграммы $\Delta_{\Box}\mathbb{Z}$, в предложении 4.4, было вызвано следующей идеей: Тензорное произведение этой резольвенты на F дает комплекс

$$0 \leftarrow (\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^0}/\mathbb{Z}D_0) \otimes F \stackrel{d_1}{\leftarrow} (\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^1}/\mathbb{Z}D_1) \otimes F \stackrel{d_2}{\leftarrow} (\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^2}/\mathbb{Z}D_2) \otimes F \leftarrow \ldots, \quad (16)$$

объекты гомологий которого по предложению 2.3 изоморфны $\varinjlim_n^{\Box^{op}} F$.

Нормализованный комплекс кубического объекта $F : \square^{op} \to \mathcal{A}$ состоит из объектов

$$C_k^{\mathrm{N}}(F) = \mathrm{Coker}\,(F(\mathbb{I}^{k-1})^k \overset{(F(\sigma_1^k),\dots,F(\sigma_k^k))}{\longrightarrow} F(\mathbb{I}^k)), \quad k \geqslant 0,$$

заданных вместе с каноническими морфизмами $coker(F(\sigma_1^k), \dots, F(\sigma_k^k)) : F(\mathbb{I}^k) \to C_k^{\mathrm{N}}(F)$. Дифференциалы этого комплекса определим следующим образом. Для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$, таких, что $i \neq j$, согласно соотношению (11) существует пара чисел (i', j'), для которой будет иметь место равенство $\sigma_j^k \delta_i^{k,\varepsilon} = \delta_{i'}^{k-1,\varepsilon} \sigma_{j'}^{k-1}$. Пара (i', j') получается вычитанием единицы из большего числа. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbb{I}^{k-1}) \arrow[r, "F(\sigma_j^k)"] \arrow[d, "F(\delta_{i'}^{k-1,\varepsilon})"'] & F(\mathbb{I}^k) \arrow[d, "F(\delta_i^{k,\varepsilon})"] \\
F(\mathbb{I}^{k-2}) \arrow[r, "F(\sigma_{j'}^{k-1})"'] & F(\mathbb{I}^{k-1})
\end{tikzcd}$$

Пользуясь этой диаграммой и равенством $F(\delta_i^{k,0})F(\sigma_i^k) = F(\delta_i^{k,1})F(\sigma_i^k)$, построим морфизмы $f_i : F(\mathbb{I}^{k-1})^k \to F(\mathbb{I}^{k-2})^{k-1}$, делающие коммутативными правый квадрат следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbb{I}^{k-1}) \arrow[r, "in_j"] \arrow[d, dashed, "F(\delta_{i'}^{k-1,0}) - F(\delta_{i'}^{k-1,1})"'] & F(\mathbb{I}^{k-1})^k \arrow[r, "(F(\sigma_1^k),\dots,F(\sigma_k^k))"] \arrow[d, dashed, "f_i"] & F(\mathbb{I}^k) \arrow[d, "F(\delta_i^{k,0}) - F(\delta_i^{k,1})"'] \\
F(\mathbb{I}^{k-2}) \arrow[r, "in_{j'}"'] & F(\mathbb{I}^{k-2})^{k-1} \arrow[r, "(F(\sigma_1^{k-1}),\dots,F(\sigma_{k-1}^{k-1}))"'] & F(\mathbb{I}^{k-1})
\end{tikzcd}$$

для каждого i из из интервала $1 \leqslant i \leqslant k$. С этой целью, при заданном i, определим f_i как единственный морфизм $F(\mathbb{I}^{k-1})^{\oplus k} \to F(\mathbb{I}^{k-2})^{\oplus(k-1)}$, для которого при $j \neq i$ композиция $f_i \circ in_j$ равна $in_{j'} \circ (F(\delta_{i'}^{k-1,0}) - F(\delta_{i'}^{k-1,1}))$, а при $j = i$ композиция $f_i \circ in_j$ равна 0. Построенный морфизм f_i будет удовлетворять соотношениям

$$(F(\sigma_1^{k-1}), \dots, F(\sigma_{k-1}^{k-1})) f_i in_j = (F(\delta_i^{k,0}) - F(\delta_i^{k,1}))(F(\sigma_1^k), \dots, F(\sigma_k^k)) in_j$$

Поскольку конус морфизмов in_j является разделяющим, то правый квадрат будет коммутативным. Теперь легко получить коммутативную диаграмму, к которой можно добавить столбец с морфизмом $d_k : C_k^{\mathrm{N}}(F) \to$

$C^{\mathrm{N}}_{k-1}(F)$.

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbb{I}^{k-1})^k \arrow[r, "(F(\sigma^k_1),\dots,F(\sigma^k_k))"] \arrow[d, "\sum_{i=1}^k(-1)^i f_i"'] & F(\mathbb{I}^k) \arrow[r, "coker(F(\sigma^k_1),\dots,F(\sigma^k_k))"] \arrow[d, "\sum_{i=1}^k(-1)^i(F(\delta^{k,0}_i)-F(\delta^{k,1}_i))"'] & C^{\mathrm{N}}_k(F) \arrow[d, dashed, "\exists!\, d_k"] \\
F(\mathbb{I}^{k-2})^{k-1} \arrow[r, "(F(\sigma^{k-1}_1),\dots,F(\sigma^{k-1}_{k-1}))"'] & F(\mathbb{I}^{k-1}) \arrow[r, "coker(F(\sigma^{k-1}_1),\dots,F(\sigma^{k-1}_{k-1}))"'] & C^{\mathrm{N}}_{k-1}(F)
\end{tikzcd} \qquad (17)$$

Так как композиции морфизмов строк равны нулю, и левый квадрат этой диаграммы коммутативен, то существует единственный морфизм d_k, делающий коммутативным правый квадрат. Поскольку проекции $coker(F(\sigma^k_1),\dots,F(\sigma^k_k))$ – эпиморфизмы, и морфизмы среднего столбца составляют комплекс, то $d_k \circ d_{k+1} = 0$. Следовательно, $(C^{\mathrm{N}}_k(F), d_k)$ будет цепным комплексом в категории $\mathcal{A}$.

Теорема 4.5 *Для произвольного кубического объекта F в абелевой категории с точными копроизведениями объекты гомологий $H_k(C^{\mathrm{N}}_*(F))$ изоморфны $\varinjlim_k^{\square^{op}} F$, для всех $k \geqslant 0$.*

Доказательство. С помощью естественного изоморфизма (1) и перестановочности функтора $(-)\otimes F$ с копределами получаем изоморфизм между комплексом $(C^{\mathrm{N}}_k(F), d_k)$ и комплексом (16). По предложению 4.4 комплекс в $\mathrm{Ab}^{\square}$, состоящий из $\mathbb{Z}h^{\mathbb{I}^k}/\mathbb{Z}D_k$, является проективной резольвентой диаграммы $\Delta_{\square}\mathbb{Z}$. Отсюда, с помощью предложения 2.3 получаем $H_n(C^{\mathrm{N}}_*(F)) \cong \varinjlim_n^{\square^{op}} F$. $\square$

Пример 4.3 *Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$. Пусть $F : \square^{op} \to \mathrm{Ab}$ - кубическая абелева группа. В этом случае комплекс, группы гомологий которого изоморфны $\varinjlim_n^{\square^{op}} F$, будет состоять из фактор-групп $C^N_k(F) = F(\mathbb{I}^k)/\sum_{i=1}^k \mathrm{Im}\, F(\sigma^k_i)$. Дифференциал d^N_k сопоставляет классу смежности содержащему $a \in F(\mathbb{I}^k)$ класс смежности элемента $d_k(a) \in F(\mathbb{I}^{k-1})$.*

4.6 Когомологии ко-кубических объектов абелевых категорий с точными произведениями

Пусть A - объект абелевой категории $\mathcal{A}$. Обозначим через $pr_i : A^n \to A$ морфизмы конуса произведения. Для произвольных объектов $A, B \in \mathcal{A}$ и морфизмов $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}(B, A)$ существует морфизм, который мы обозначим через $(f_1,\dots,f_n)^*: B \to A^n$, удовлетворяющий соотношениям $f_i = pr_i \circ (f_1,\dots,f_n)^*$, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Функтор $F : \Box \to \mathcal{A}$ называется ко-кубическим объектом категории $\mathcal{A}$. Ему можно сопоставить кубический объект $F^{op} : \Box^{op} \to \mathcal{A}^{op}$ в категории $\mathcal{A}^{op}$. Если $\mathcal{A}$ - абелева категория с точными произведениями, то определены гомологии для F^{op}. Двойственные к объектам гомологий кубических объектов F^{op} в $\mathcal{A}^{op}$ называются объектами когомологий ко-кубического объекта $F : \Box \to \mathcal{A}$. С помощью принципа двойственности, получаем нормализованный комплекс для когомологий, он состоит из объектов

$$C^k_{\mathrm{N}}(F) = Ker(F(\mathbb{I}^k) \overset{(F(\sigma^k_1),\dots,F(\sigma^k_k))^*}{\longrightarrow} F(\mathbb{I}^{k-1})^k).$$

Диаграмма (17) в категории $\mathcal{A}^{op}$ содержит коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbb{I}^k) & & C^k_N(F) \arrow[ll, "ker(F(\sigma^k_1),\dots,F(\sigma^k_k))^*"'] \\
F(\mathbb{I}^{k-1}) \arrow[u, "\sum_{i=1}^k(-1)^i(F(\delta^{k,0}_i)-F(\delta^{k,1}_i))"] & & C^{k-1}_N(F) \arrow[ll, "ker(F(\sigma^{k-1}_1),\dots,F(\sigma^{k-1}_{k-1}))^*"] \arrow[u, "d^{k-1}_N"']
\end{tikzcd}$$

приводящий к определению дифференциалов $d^k_N : C^k_N(F) \to C^{k+1}_N(F)$ при $k \geqslant 0$. (При $k < 0$ дифференциалы и объекты равны 0.)

Следующее утверждение получается из теоремы 4.5, если заменить в ней категорию $\mathcal{A}$ на двойственную категорию.

Следствие 4.6 *Для произвольного ко-кубического объекта F в абелевой категории с точными произведениями объекты когомологий $H^k(C^*_{\mathrm{N}}(F))$ изоморфны $\varprojlim^k_{\Box} F$, для всех $k \geqslant 0$.*

Пример 4.4 *Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$. Для ко-кубической абелевой группы $F : \Box \to \mathrm{Ab}$ коцепной нормализованный комплекс будет состоять из абелевых групп*

$$C^k_N(F) = \bigcap_{i=1}^k Ker(F(\sigma^k_i)) = \{a \in F(\mathbb{I}^k) \mid (\forall i \in \{1,\dots,k)\})F(\sigma^k_i)(a) = 0\}$$

и гомоморфизмов $d^k(a) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i(F(\delta^{k+1,0}_i) - F(\delta^{k+1,1}_i))$, определенных как дифференциалы комплекса, соответствующего ко-кубической абелевой группе F. В силу коммутативности диаграммы, эти дифференциалы переводят элементы из $C^k_N(F)$ в элементы из $C^{k+1}_N(F)$.

5 Гомологии кубических множеств с коэффициентами в контравариантных системах

Пусть $X \in \mathrm{Set}^{\square^{op}}$ – кубическое множество. *Контравариантной системой объектов* абелевой категории $\mathcal{A}$ на X называется диаграмма $F : (\square/X)^{op} \to \mathcal{A}$. Применяется тпакже термин *гомологическая система*. Пусть $Q_X : \square/X \to \square$ – забывающий функтор слоя. Объектами гомологий кубического множества X с коэффициентами в F называются объекты гомологий комплекса $C_*^{\mathrm{N}}(Lan^{Q_X^{op}} F)$. Построим цепной комплекс, объекты гомологий которого изоморфны объектам гомологий кубического множества X с коэффициентами в F.

5.1 Построение нормализованного комплекса

Категорию $(\square/X)^{op}$ можно рассматривать как состоящую из множества объектов $\coprod\limits_{n\geqslant 0} X_n$. Морфизмы в ней, из (x,m) в (y,n), задаются как тройки $x \xrightarrow{\alpha} y$, такие, что $\alpha \in \square(\mathbb{I}^n, \mathbb{I}^m)$ и $X(\alpha)(x) = y$. Рассмотрим кубический объект $(C_n(X,F), d_i^{n,\varepsilon}, s_i^n)$ в категории $\mathcal{A}$. Его объекты равны $C_n(X,F) = \bigoplus\limits_{x \in X_n} F(x)$. Из предложения 3.2 следует, что граничные операторы $d_i^{n,\varepsilon} : C_n(X,F) \to C_{n-1}(X,F)$ определяются условием коммутативности диаграмм

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{x\in X_n} F(x) \arrow[r, "d_i^{n,\varepsilon}"] & \bigoplus\limits_{x\in X_{n-1}} F(x) \\
F(x) \arrow[u, "in_x"] \arrow[r, "F(\delta_i^{n,\varepsilon} : x \to X(\delta_i^{n,\varepsilon})x)"] & F(X(\delta_i^{n,\varepsilon})x) \arrow[u, "in_{X(\delta_i^{n,\varepsilon})x}"']
\end{tikzcd}$$

Для операторов вырождения $s_i^n : C_{n-1}(X,F) \to C_n(X,F)$ должны быть коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{x\in X_{n-1}} F(x) \arrow[r, "s_i^n"] & \bigoplus\limits_{x\in X_n} F(x) \\
F(x) \arrow[u, "in_x"] \arrow[r, "F(\sigma_i^n : x \to X(\sigma_i^n)x)"] & F(X(\sigma_i^n)x) \arrow[u, "in_{X(\sigma_i^n)x}"']
\end{tikzcd} \qquad (18)$$

Полученный кубический объект будет изоморфен $Lan^{Q_X^{op}} F$.

Положим $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i (d_i^{n,0} - d_i^{n,1})$.

Рассмотрим последовательность объектов

$$C_n^{\mathrm{N}}(X,F) = \mathrm{Coker}\left((\oplus_{x\in X_{n-1}} F(x))^{\oplus n} \xrightarrow{(s_1^n,\ldots,s_n^n)} \oplus_{x\in X_n} F(x) \right)$$

вместе с каноническими проекциями $\bigoplus\limits_{x\in X_n} F(x) \xrightarrow{pr_n} C_n^{\mathrm{N}}(X,F)$.

В силу коммутативности диаграммы (17) для произвольного кубического объекта абелевой категории, композиция $pr_{n-1}\circ d_n \circ (s_1^n,\ldots,s_n^n)$ равна нулю. Поскольку $pr_n \circ (s_1^n,\ldots,s_n^n) = 0$, причем pr_n как проекция на коядро обладает свойством универсальности, то существует единственный морфизм $d_n^N : C_n^{\mathrm{N}}(X,F) \to C_{n-1}^{\mathrm{N}}(X,F)$, удовлетворяющий равенству $d_n^N \circ pr_n = pr_{n-1}\circ d_n$. Тем самым построен нормализованный комплекс $(C_n^{\mathrm{N}}(X,F), d_n^{\mathrm{N}})_{n\geqslant 0}$, объекты гомологий которого берутся за определение объектов гомологий кубического множества X с коэффициентами в контравариантной системе $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$.

Пример 5.1 *Пусть X - кубическое множество и пусть $G : (\Box/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ - контравариантная система абелевых групп. Ненормализованный комплекс получен из кубической абелевой группы $Lan^{Q_X^{op}} G : \Box^{op} \to \mathrm{Ab}$, граничные операторы которой действуют как*

$$d_i^{k,\varepsilon}(x\in X_k, g\in G(x)) = (X(\delta_i^{k,\varepsilon})x, G(\delta_i^{k,\varepsilon} : x \to X(\delta_i^{k,\varepsilon})x)).$$

Он состоит из абелевых групп $C_k(X,G) = \oplus_{x\in X_k} G(x)$ и дифференциалов $d_k = \sum_{i=1}^k (-1)^i (d_i^{k,0} - d_i^{k,1})$. Для каждого $x \in X_{k-1}$ оператор $s_i^k = Lan^{Q_X^{op}} G : C_{k-1}(X,G) \to C_k(X,G)$ вырождения этой кубической абелевой группы действует как $(x, g\in G(x)) \mapsto (X(\sigma_i^k)x, G(x \xrightarrow{\sigma_i^k} X(\sigma_i^k)x)(g))$. Нормализованный комплекс будет состоять из фактор-групп

$$C_k^N(X,G) = \oplus_{x\in X_k} G(x) / \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\, s_i^k.$$

Дифференциал d_k^N определен дифференциалом d_k.

Пример 5.2 *Рассмотрим ковариантную систему абелевых групп $G : \Box/X \to \mathrm{Ab}$. Объектами категории $\Box/X$ служат элементы $x \in \coprod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$,* *а морфизмы в $\Box/X$ определяются как тройки $y \xrightarrow{\alpha} x$, для которых $x \xrightarrow{\alpha} y$ - морфизмы в $(\Box/X)^{op}$, что означает выполнение равенства $X(\alpha)(x) = y$.*

Ненормализованный комплекс будет состоять из абелевых групп $C^k(X,G) = \prod_{x\in X_k} G(x)$. Элементы из $C^k(X,G)$ задаются как функции $\varphi : X_k \to \bigcup_{x\in X_k} G(x)$, такие, что $\varphi(x) \in G(x)$ для всех $x \in X_k$. Его дифференциалы равны $d^k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(d^i_{k,0} - d^i_{k,1})$, где $d^i_{k,\varepsilon} : C^{k-1}(X,G) \to C^k(X,G)$ - кограничные операторы определенные по формуле для значений на $\varphi \in C^{k-1}(X,G)$:

$$d^i_{k,\varepsilon}(\varphi)(x) = G(\delta^{k,\varepsilon}_i : X(\delta^{k,\varepsilon}_i)x \to x)(X(\delta^{k,\varepsilon}_i)x).$$

Операции вырождения $s^i_k : C^k(X,G) \to C^{k-1}(X,G)$ ко-кубической абелевой группы $Ran_{Q_X}G$ определены по формуле

$$s^i_k(\varphi)(x) = G(X(\sigma^k_i)x \xrightarrow{\sigma^k_i} x)(X(\sigma^k_i)x)$$

Нормализованный комплекс состоит из групп $C^k_N(X,G) = \bigcap_{i=1}^{k} Ker(s^i_k)$, и его дифференциалы определены как $d^k_N(\varphi) = d^k(\varphi)$.

5.2 Теорема об изоморфизме гомологий кубического множества и сателлитов функтора копредела

Пусть $C^{\mathrm{N}}_*(X,F) = (C^{\mathrm{N}}_n(X,F), d^{\mathrm{N}}_n)$ – нормализованный комплекс, построенный в подсекции 5.1 для функтора $F : (\Box/X)^{op} \to \mathcal{A}$.

Теорема 5.1 *Пусть X - кубическое множество, F - контравариантная система объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями на X. Тогда существуют изоморфизмы $H_n(C^{\mathrm{N}}_*(X,F)) \cong \varinjlim_n^{(\Box/X)^{op}} F$, для всех $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Мы построили сначала кубический объект абелевой категории как левое расширение Кана $Lan^{Q^{op}_X} F : \Box^{op} \to \mathcal{A}$. Комплекс $C^{\mathrm{N}}_*(X,F)$ был построен как нормализованный комплекс кубического объекта $Lan^{Q^{op}_X} F$. Поскольку для каждого $\mathbb{I}^k \in \Box$ каждая компонента связности категории $\mathbb{I}^k/Q_X$ имеет инициальный объект, то значения $\varinjlim_n^{(\Box/X)^{op}} F$ изоморфны $\varinjlim_n^{\Box^{op}} Lan^{Q^{op}_X} F$, который по теореме 4.5 изоморфен $H_n(C^{\mathrm{N}}_*(Lan^{Q^{op}_X} F))$. $\Box$

Следствие 5.2 *Пусть X - кубическое множество, F - ковариантная система объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными произведениями на X. Тогда существуют изоморфизмы $H^n(C^*_{\mathrm{N}}(X,F)) \cong \varprojlim^n_{\square/X} F$, для всех $n \geqslant 0$.*

5.3 Инвариантность гомологий при переходе к прямому образу систем коэффициентов

Для всякого морфизма кубических множеств $f : X \to Y$ определен функтор $\square/f : \square/X \to \square/Y$. Он сопоставляет каждому объекту $\widetilde{x} : \square^n \to X$ категории $\square/X$ объект категории $\square/Y$, равный композиции $\square^n \xrightarrow{\widetilde{x}} X \xrightarrow{f} Y$. Морфизмами в $\square/X$ служат коммутативные треугольники со сторонами $(\square^{p_1} \xrightarrow{\square(\alpha)} \square^{p_2}, \square^{p_1} \xrightarrow{\widetilde{x_1}} X, \square^{p_2} \xrightarrow{\widetilde{x_2}} X)$, и они переходят в $(\square^{p_1} \xrightarrow{\square(\alpha)} \square^{p_2}, \square^{p_1} \xrightarrow{f\widetilde{x_1}} X, \square^{p_2} \xrightarrow{f\widetilde{x_2}} Y)$.

По теореме 3.6 имеет место изоморфизм $\varinjlim_n^{(\square/X)^{op}} F \xrightarrow{\cong} \varinjlim_n^{(\square/Y)^{op}} f_*F$. Применяя теорему 5.1, получаем

Следствие 5.3 *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм кубических множеств. Тогда для любого функтора $F : (\square/X)^{op} \to \mathcal{A}$ в абелеву категорию с точными копроизведениями существуют естественные изоморфизмы $H_n(X,F) \xrightarrow{\cong} H_n(Y, f_*F)$, для всех $n \geqslant 0$.*

5.4 Критерий изоморфизма гомологий кубических множеств

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм кубических множеств. Для каждого куба $\tilde{y} : \square^n \to Y$ определен его обратный слой $\overleftarrow{f}(y)$. Из предложения 3.7 и теоремы 5.1 вытекает следущее утверждение:

Следствие 5.4 *Следующие свойства морфизма кубических множеств $f : X \to Y$ равносильны:*

1. *Для всех $y \in Y$ и $n \geqslant 0$ группы $H_n(\overleftarrow{f}(y), \Delta\mathbb{Z})$ изоморфны группам гомологии кубической точки $H_n(\square^0, \Delta\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n = 0; \\ 0, & \text{если } n > 0. \end{cases}$*

2. *Канонические гомоморфизмы абелевых групп $H_n(X, f^*F) \to H_n(Y, F)$ являются изоморфизмами для всякого функтора $F : (\square/Y)^{op} \to \mathrm{Ab}$, для всех $n \geqslant 0$.*

3. *Канонические морфизмы $H_n(X, f^*F) \to H_n(Y, F)$ являются изоморфизмами для всякого функтора $F : (\square/Y)^{op} \to \mathcal{A}$ в произвольную абелеву категорию $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями, для всех $n \geqslant 0$.*

5.5 Спектральная последовательность копредела кубических множеств

Из теоремы 5.1, подставляя в предложение 3.8 вместо малой категории $\mathscr{D}$ категорию $\square$, приходим к спектральной последовательности для гомологий копредела кубических множеств, обобщающей аддиционную точную последовательность.

Следствие 5.5 *Пусть J – малая категория, и пусть $\{X^i\}_{i\in J}$ — такая диаграмма кубических множеств, что*

$$\varinjlim{}_q^J \{\mathbb{Z}(X^i_n)\}_{i\in J} = 0, \text{ для любых } n \geqslant 0 \text{ и } q > 0. \tag{19}$$

Пусть $\lambda_i : X^i \to \varinjlim{}^J \{X^i\}_{i\in J}$ — конус морфизмов копредела кубических множеств. Тогда для всякой абелевой категории с точными копроизведениями $\mathcal{A}$ и любой контравариантной системы $F : (\square/\varinjlim{}^J\{X^i\})^{op} \to \mathcal{A}$ существует спектральная последовательность первой четверти

$$E^2_{p,q} = \varinjlim{}_p^J \{H_q(X^i, \lambda_i^* F)\}_{i\in J} \Rightarrow H_{p+q}(\varinjlim{}^J\{X^i\}, F).$$

Условие (19) выполнено, например, для покрытия, состоящего из всех конечных пересечений кубических множеств некоторого семейства.

5.6 Кубические гомологии малых категорий

Кубические гомологии малой категории введем как кубические гомологии ее кубического нерва. Докажем, что эти гомологии изоморфны гомологиям малой категории, определенным в §2.

Кубическим нервом малой категории $\mathscr{C}$ [39] называется кубическое множество $N^{\square}\mathscr{C} := \mathrm{Cat}(-, \mathscr{C})|_{\square} : \square^{op} \to \mathrm{Set}$. Оно определено ограничением функтора $\mathrm{Cat}(-, \mathscr{C})$ на категорию кубов. Множество его n-мерных кубов равно $N^{\square}_n(\mathscr{C}) = \mathrm{Cat}(\mathbb{I}^n, \mathscr{C})$.

Категория элементов нерва $\square/N^{\square}\mathscr{C}$ изоморфна комма-категории $\square/\mathscr{C}$, объектами которой служат морфизмы $\mathbb{I}^n \to \mathscr{C}$, $n \geqslant 0$, а морфизмами которой из $\mathbb{I}^m \xrightarrow{f} \mathscr{C}$ в $\mathbb{I}^n \xrightarrow{g} \mathscr{C}$ являются коммутативные треугольники

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}^m \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \mathscr{C} \\ & \mathbb{I}^n \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{20}$$

в которых θ является морфизмом категории $\square$. Мы будем отождествлять категории $\square/N^{\square}\mathscr{C}$ и $\square/\mathscr{C}$.

Определим функтор $\partial : \square/\mathscr{C} \to \mathscr{C}$, сопоставляя каждому кубику $x : \mathbb{I}^n \to \mathscr{C}$ объект $x(1, \cdots, 1)$. Напомним, что функтор $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ называется асферичным, если его левые слои S/d стягиваемы [39], в этом случае $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} FS \cong \varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} F$. Функтор ∂ асферичен [35, Lemma 23].

Пусть $H_n(N^{\square}\mathscr{C}, F \circ \partial^{op})$ – объекты кубических гомологий кубического нерва. Из теоремы 5.1 и асферичности функтора ∂ вытекает

Следствие 5.6 *Пусть $\mathscr{C}$ – малая категория, а $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными копроизведениями. Тогда для всякого функтора $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathcal{A}$ объекты кубических гомологий $H_n(N^{\square}\mathscr{C}, F \circ \partial^{op})$ изоморфны $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} F$, для всех $n \geqslant 0$.*

5.7 Кубические когомологии Бауэса-Виршинга

Пусть $\mathcal{A}$ - абелева категория с точными произведениями. Обозначим через $H^n_{BW}(\mathscr{C}, F)$, $n \geqslant 0$, n-е когомологии Бауэса-Виршинга малой категории с коэффициентами в натуральной системе объектов из $\mathcal{A}$ [5], [25].

Введем функтор $\mathfrak{d} : \square/\mathscr{C} \to \mathfrak{F}\mathscr{C}$. С этой целью обозначим через $0^n \in \mathbb{I}^n$, $n > 0$, точку куба, все координаты которой равны 0, а через 1^n - точку куба, все координаты которой равны 1. Если $n = 0$, то эти точки совпадают, т.е. $0^0 = 1^0$.

Определим функтор $\mathfrak{d} : \square/\mathscr{C} \to \mathfrak{F}\mathscr{C}$ на объектах $\mathbb{I}^n \xrightarrow{g} \mathscr{C}$ как $\mathfrak{d}(g) = (g(0^n) \xrightarrow{g(0^n \leqslant 1^n)} g(1^n))$, $n \geqslant 0$. Для каждого морфизма $\theta : f \to g$ из $\square/\mathscr{C}$

изображенному на диаграмме (20), выполнено $g\theta = f$. Мы сопоставим ему морфизм $\mathfrak{d}(f) \to \mathfrak{d}(g)$ категории $\mathfrak{F}\mathscr{C}$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
f(1^m) = g\theta(1^m) \arrow[r, "g(\theta(1^m)\leqslant 1^n)"] & g(1^n) \\
f(0^m) = g\theta(0^m) \arrow[u, "f(0^m\leqslant 1^m)"] & g(1^n) \arrow[l, "g(0^n\leqslant\theta(0^m))"] \arrow[u, "g(0^n\leqslant 1^n)"']
\end{tikzcd}$$

Следствие 5.7 *Пусть* $\mathscr{C}$ *- малая категория,* $G : \mathfrak{F}\mathscr{C} \to \mathcal{A}$ *- натуральная система на* $\mathscr{C}$*. Тогда* $H^n_{BW}(\mathscr{C}, G) \cong H^n(N^\square\mathscr{C}, G\circ\mathfrak{d})$*, для всех* $n \geqslant 0$*.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный морфизм $\alpha \in Mor\,\mathscr{C} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Докажем, что левый слой $\mathfrak{d}/\alpha$ стягиваем. Пусть $Id\langle\alpha\rangle$ категория, объекты которой состоят из разложений морфизма α, представленных как пара морфизмов $\mathrm{dom}\,\alpha \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} \mathrm{cod}\,\alpha$ категории $\mathscr{C}$, таких, что $\gamma\beta = \alpha$. Морфизмы между разложениями $\mathrm{dom}\,\alpha \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} \mathrm{cod}\,\alpha$ и $\mathrm{dom}\,\alpha \xrightarrow{\beta'} c' \xrightarrow{\gamma'} \mathrm{cod}\,\alpha$ задаются с помощью морфизмов $c \xrightarrow{\xi} c'$, делающих коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}\,\alpha \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta'"'] & c \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\xi"'] & \mathrm{cod}\,\alpha \\
& c' \arrow[ur, "\gamma'"'] &
\end{tikzcd}$$

Категория $Id\langle\alpha\rangle$ имеет инициальный объект $\mathrm{dom}\,\alpha \xrightarrow{1_{\mathrm{dom}\,\alpha}} \mathrm{dom}\,\alpha \xrightarrow{\alpha} \mathrm{cod}\,\alpha$ и финальный объект $\mathrm{dom}\,\alpha \xrightarrow{\alpha} \mathrm{cod}\,\alpha \xrightarrow{1_{\mathrm{cod}\,\alpha}} \mathrm{cod}\,\alpha$, и значит ее нерв стягиваем.

Каждый объект $\mathfrak{d}(\mathbb{I}^n \xrightarrow{g} \mathscr{C}) \xrightarrow{(u_0,u_1)} \alpha$ категории $\mathfrak{d}/\alpha$ определен парой, состоящей из функтора $\mathbb{I}^n \xrightarrow{g} \mathscr{C}$ и морфизма

$$\begin{tikzcd}
g(1^n) \arrow[r, "u_1"] & \mathrm{cod}\,\alpha \\
g(0^n) \arrow[u, "g(0^n\leqslant 1^n)"] & \mathrm{dom}\,\alpha \arrow[l, "u_0"] \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

категории $\mathfrak{F}\mathscr{C}$.

Сопоставим каждой такой паре функтор $\mathbb{I}^n \to Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$ переводящий каждую точку $x \in \mathbb{I}^n$ в объект категории $Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$ равный разложению

$$\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\beta_x} g(x) \xrightarrow{\gamma_x} \operatorname{cod}\alpha$$

где β_x равен композиции морфизмов $\operatorname{dom}\alpha \to g(0^n) \to g(x)$, а γ_x равен композиции $g(x) \to g(1^n) \to \operatorname{cod}\alpha$.

Каждому морфизму $x \leqslant x'$ категории $\mathbb{I}^n$ сопоставим морфизм в $Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$, заданный с помощью диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{dom}\alpha \arrow[r, "\beta_x"] \arrow[dr, "\beta_{x'}"'] & g(x) \arrow[r, "\gamma_x"] \arrow[d, "g(x\leqslant x')"] & \operatorname{cod}\alpha \\
& g(x') \arrow[ur, "\gamma_{x'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Это приводит к биекции между $\mathrm{Ob}(\mathfrak{d}/\alpha)$ и $\mathrm{Ob}(\square/Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle)$. Морфизмы между объектами из $\mathfrak{d}/\alpha$ задаются с помощью морфизмов категории $\square$. Аналогичное верно для морфизмов категории $\square/Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$. Значит, каждому морфизму категории $\mathfrak{d}/\alpha$ надо сопоставить морфизм категории $\square/Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$ имеющий морфизм кубов, равный морфизму кубов между соответствующими объектами.

Получаем изоморфизм категорий $\mathfrak{d}/\alpha \cong \square/Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$. Причем симплициальный нерв категории $Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$ стягиваем, и значит $\square/Id_{\mathscr{C}}\langle\alpha\rangle$ имеет стягиваемый нерв. Следовательно, симплициальный нерв категории $\mathfrak{d}/\alpha$ стягиваем, откуда для всякого функтора $G : \mathfrak{F}\mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ существует естественный изоморфизм $H^n_{BW}(\mathscr{C}, G) \cong H^n(N^\square\mathscr{C}, F\mathfrak{d})$. $\square$

6 Гомологии и когомологии кубических множеств с локальными коэффициентами

Рассмотрим гомологии кубических множеств с коэффициентами в локальных системах объектов абелевой категории с точными копроизведениями. Докажем, что они не зависят от вырожденных кубов и значений локальной системы на вырожденных кубах. Затем рассмотрим когомологии кубических множеств с коэффициентами в локальных системах и докажем, что слабая эквивалентность кубических множеств дает изоморфизм когомологий с коэффициентами в локальных системах абелевых групп.

6.1 Гомологии кубических множеств с коэффициентами в локальных системах

Контравариантная система на кубическом множестве называется локальной, если ее значения на морфизмах являются изоморфизмами. В этом подразделе сначала мы замечаем, что гомологии стандартного куба с коэффициентами в локальной системе изоморфны гомологиям точки. Затем докажем, что гомологии кубического множества с коэффициентами в локальной системе изоморфны комплексу n-е объекты цепей которого равны $\oplus_{x\in X_n^N F(x)}$.

Первое утверждение следует из теоремы 5.1.

Следствие 6.1 *Пусть F – локальная система на кубе $\square^n$. Тогда $H_q(\square^n, F) = 0$ при $q > 0$, и $H_0(\square^n, F) = F(1_{\mathbb{I}^n})$.*

Доказательство. Произвольным малой категории $\mathscr{C}$ и диаграмме $G : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$, состоящей из изоморфизмов, соответствует диаграмма G^{-1} полученная из G обращением ее морфизмов. Согласно [24, Приложение II, предложение 4.4], существуют изоморфизмы $\varinjlim_k^{\mathscr{C}} G \cong \varinjlim_k^{\mathscr{C}^{op}} G^{-1}$, для всех $k \geqslant 0$. Категория $\square/\square^n$ имеет финальный объект $\tilde{1}_{\square^n} : \square^n \to \square^n$. Следовательно, $H_k(\square^n, F) \cong \varinjlim_k^{(\square/\square^n)^{op}} F \cong \varinjlim_k^{\square/\square^n} F^{-1}$, откуда следует доказываемое. $\square$

Построим (сокращенный) комплекс для нахождения гомологий кубических множествс коэффициентами в локальных системах.

Пусть X – кубическое множество. Обозначим через X_n^N множество невырожденных n-мерных кубиков, при $n \geqslant 0$.

Теорема 6.2 *Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными копроизведениями, X – кубическое множество, $F : (\square/X)^{op} \to \mathcal{A}$ – локальная система на X. Тогда объекты ее нормализованного комплекса $C_n^{\mathrm{N}}(X, F)$ изоморфны $\bigoplus\limits_{x\in X_n^{\mathrm{N}}} F(x)$, а дифференциалы $d_n^{\mathrm{N}} : \bigoplus\limits_{x\in X_n^{\mathrm{N}}} F(x) \to \bigoplus\limits_{x\in X_{n-1}^{N}} F(x)$ состоят из морфизмов, делающих коммутативной диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{x\in X_n} F(x) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "pr_n"'] & \bigoplus\limits_{x\in X_{n-1}} F(x) \arrow[d, "pr_{n-1}"] \\ \bigoplus\limits_{x\in X_n^N} F(x) \arrow[r, "d_n^N"'] & \bigoplus\limits_{x\in X_{n-1}^N} F(x) \end{tikzcd} \tag{21}$$

Здесь $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i(d_i^{n,0} - d_i^{n,1})$ *– дифференциалы комплекса соответствующего кубическому объекту* $Lan^{Q_X^{op}}F$.

Доказательство. Мы определили объекты цепей нормализованного комплекса по формуле

$$C_n^{\mathrm{N}}(X,F) = \mathrm{Coker}\left((\oplus_{x\in X_{n-1}}F(x))^{\oplus n} \xrightarrow{(s_1^n,\dots,s_n^n)} \oplus_{x\in X_n}F(x)\right)$$

Достаточно доказать, что для всякого $n \geqslant 0$, объект $\oplus_{x\in X_n^N}F(x)$ вместе с морфизмом $\oplus_{x\in X_n}F(x) \stackrel{pr_n}{\to} \oplus_{x\in X_n^N}F(x)$, определенном как проекция на прямое слагаемое, будет коядром морфизма $(s_1^n,\dots,s_n^n)$. Морфизмы d_n^N будут определены с помощью свойства универсальности функтора коядра.

Морфизмы $s_i^n : \oplus_{x\in X_{n-1}}F(x) \to \oplus_{x\in X_n}F(x)$ определены с помощью свойства коммутативности диаграммы (18), как удовлетворяющие соотношениям

$$s_i^n \circ in_x = in_{X(\sigma_i^n)(x)} \circ F(x \xrightarrow{\sigma_i^n} X(\sigma_i^n)(x))$$

для всех $n \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n$ и $x \in X_{n-1}$.

Образ оператора вырождения s_i^n равен сумме образов морфизмов $s_i^n in_x$ по всем $x \in X_{n-1}$. Значит, поскольку морфизмы $F(x \xrightarrow{\sigma_i^n} X(\sigma_i^n)(x))$ являются изоморфизмы, то образы операторов s_i^n равны прямой сумме объектов $F(X(\sigma_i^n)x)$. Эта прямая сумма равна $\oplus_{x\in D_nX}F(x)$, где $D_nX \subseteq X_n$ подмножество вырожденыых n-мерных кубов, откуда вытекает, что коядро морфизма $(s_1^n,\dots,s_n^n)$ равно $\oplus_{x\in X_n^N}F(x)$.

На этом доказательство можно закончить. Но мы применили некоторые интуитивно понятные термины, не обосновывая их. Поэтому докажем, что коядро морфима $(s_1^n,\dots,s_n^n)$ равно $\oplus_{x\in X_n^N}F(x)$, без использования этих терминов.

С этой целью рассмотрим произвольный объект $A \in \mathcal{A}$ и морфизм $\gamma : \oplus_{x\in X_n}F(x) \to A$. Для них имеют место импликации

$$\begin{aligned}\gamma \circ (s_1^n,\dots,s_n^n) = 0 &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,n\})\gamma \circ s_i^n = 0\\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,n\})(\forall x \in X_{n-1})\gamma \circ s_i^n \circ in_x = 0,\end{aligned}$$

где $in_x : F(x) \to \oplus_{x\in X_{n-1}}F(x)$ канонические морфизмы копроизведения. Используя коммутативную диаграмму (18), получим

$$\gamma \circ (s_1^n,\dots,s_n^n) = 0 \Leftrightarrow \gamma \circ in_{X(\sigma_i^n)x} \circ F(\sigma_i^n : x \to X(\sigma_i^n)x) = 0.$$

После этого воспользуемся тем, что F – локальная система. Это дает обратимость морфизмов $F(\sigma_i^n : x \to X(\sigma_i^n)x)$, а вместе с тем, логические эквивалентности

$$\begin{aligned}\gamma \circ (s_1^n, \ldots, s_n^n) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, n\})(\forall x \in X_{n-1})\gamma \circ in_{X(\sigma_i^n)x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X_n \setminus X_n^N)\gamma \circ in_x = 0.\end{aligned}$$

Так как $(\forall x \in X_n \setminus X_n^N) pr_n \circ in_x = 0$, то отсюда получим $pr_n \circ (s_1^n, \ldots, s_n^n) = 0$.

Кроме того, легко видеть, что для любого $\gamma : \oplus_{x \in X_n} F(x) \to A$, удовлетворяющего условию $\gamma \circ (s_1^n, \ldots, s_n^n) = 0$, существует морфизм $\widetilde{\gamma} : \oplus_{x \in X_n^N} F(x) \to A$ такой, что $\widetilde{\gamma} \circ pr_n = \gamma$. Для этой цели можно взять $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ in_n$, где $in_n : \oplus_{x \in X_n^N} F(x) \to \oplus_{x \in X_n} F(x)$ – каноническая инъекция прямого слагаемого. Для доказательства равенства $\widetilde{\gamma} \circ pr_n = \gamma$ достаточно рассмотреть морфизмы in_x, для всех $x \in X_n$, и рассмотреть композиции $\gamma \circ in_n \circ pr_n \circ in_x$ в двух случаях - когда $x \in X_n \setminus X_n^N$ и когда $x \in X_n^N$. Во всех случаях мы получим $\gamma \circ in_n \circ pr_n \circ in_x = \gamma \circ \in_x$. В силу разделяющего свойства конуса морфизмов копроизведения мы получим $\gamma \circ in_n = \gamma$.

Поскольку pr_n – эпиморфизм, то $\widetilde{\gamma}$ будет единственным. Следовательно пара $(\oplus_{x \in X_n^N} F(x), pr_n)$ – коядро морфизма $(s_1^n, \ldots, s_n^n)$, и значит оно изоморфно $C_n^{\mathrm{N}}(X, F)$.

Морфизм d_n^N были построен выше для произвольного функтора F как морфизм между коядрами. В случае, когда F – локальная система, он будет морфизмом, делающим коммутативной диаграмму (21). Поскольку pr_n – эпиморфизм, то d_n^N будет единственным. □

Замечание 6.1 *Не для всякого кубического множества X последовательность X_n^N будут составлять полукубическое множество. Поэтому нельзя сказать, что теорема 6.2 утверждает, что гомологии с коэффициентами в локальной системе изоморфны гомологиям некоторого полукубического множества.*

6.2 Когомологии кубических множеств с коэффициентами в локальных системах абелевых групп

Пусть $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}^{op}$ – категория, двойственная категории абелевых групп. Контравариантные системы объектов категории Ab^{op} называются ковариантными системами. Копределы в Ab^{op} будут пределами в Ab. *Ковариантной системой* абелевых групп на кубическом множестве X называется диаграмма $F : \square/X \to \mathrm{Ab}$. Из теоремы 5.1 следует, что для любого кубического множества X группы когомологий $H^n(X, F)$ с коэффициентами в ковариантной системе $F : \square/X \to \mathrm{Ab}$ будут изоморфны $\lim^n_{\square/X} F$. Ковариантные и контравариантные системы называются *локальными*, если их значения на морфизмах категории $\square/X$ являются изоморфизмами.

Существует утверждение, доказанное Квилленом [55, Chapter II, §3, Proposition 4], характеризующее слабые эквивалентности в категории симплициальных множеств. Из этого утверждения вытекает, что для всякой слабой эквивалентности симплициальных множеств $f : X \to Y$ и для локальной системы $F : \Delta/Y \to \mathrm{Ab}$ существуют изоморфизмы групп когомологий $H^n(Y, F) \to H^n(X, F \circ (\Delta/f))$.

Локальные системы на симплициальном множестве определены Габриелем и Цисманом [24, приложение II, §4.5] как контравариантные системы $F : (\Delta/X)^{op} \to \mathcal{A}$ принимающие значения в произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями. Гомологии определяются как сателлиты функтора копредела. Если подставить $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}^{op}$, то гомологии превратятся в когомологии $H^n(X, F)$ симплициальных множеств X с коэффициентами в локальных системах F, которые, согласно определению Габриеля и Цисмана, будут равны $\varprojlim^n_{\Delta/X} F$.

Возникает вопрос, будут гоморфизмы групп когомологий $H^n(Y, F) \to H^n(X, F \circ (\square/f))$ с коэффициентами в локальной системе F изоморфизмами в случае, когда $f : X \to Y$ - слабая эквивалентность кубических множеств.

Напомним определение тестовой категории. Обозначим через Hot классическую гомотопическую категорию, построенную из категории топологических пространств или симплициальных множеств как категория частных относительно слабых эквивалентностей.

Известно [34], что категория Hot эквивалентна категории частных категории Cat относительно класса W_∞, состоящего из стрелок $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ категории Cat, для которых симплициальное отображение нервов $\mathrm{B}(f) : \mathrm{B}\mathscr{C} \to \mathrm{B}\mathscr{C}'$ является слабой эквивалентностью (симплициальных множеств). Эквивалентность категорий $\mathrm{Hot} \to W_\infty^{-1}\mathrm{Cat}$ строится с помощью функтора $Simpl : \mathrm{Set}^{\Delta^{op}} \to \mathrm{Cat}$ (см. [49, page 5]) сопоставляющего каждому симплициальному множеству категорию его симплексов.

Категория Hot будет эквивалентна категории частных категории симплициальных множеств относительно морфизмов $f : X \to Y$ таких, что $\Delta/f : \Delta/X \to \Delta/Y$ - слабая эквивалентность в Cat.

Проблемы, связанные с тестовыми категориями, кратко и понятно описаны в работе [10], посвященной классам тестовых категорий кубических множеств.

Пусть $\mathscr{D}$ - малая категория. Рассмотрим функтор $\mathscr{D}/(-) : \mathscr{D} \to \mathrm{Cat}$, сопоставляющий каждому объекту $a \in \mathscr{D}$ категорию $\mathscr{D}/a$, и каждому морфизму $\alpha : a \to b$ - функтор $\mathscr{D}/\alpha : \mathscr{D}/a \to \mathscr{D}/b$, переводящий всякий объект $a' \to a$ категории $\mathscr{D}/a$ в композицию $a' \to a \xrightarrow{\alpha} b$. Функтору $\mathscr{D}/(-)$ соответствует диаграмма функторов

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}} \arrow[rr, "i_{\mathscr{D}}"] & & \mathrm{Cat} \\
& \mathscr{D} \arrow[ul, "h^{\mathscr{D}}"] \arrow[ur, "\mathscr{D}/(-)"'] &
\end{tikzcd}
$$

где функтор $i_{\mathscr{D}}$ будет левым расширением Кана функтора $\mathscr{D}/(-)$ вдоль вложения Ионеды $h_{\mathscr{D}}$. Он принимает значения $i_{\mathscr{D}}(X) = \mathscr{D}/X$ на объектах категории $\mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$, и $i_{\mathscr{D}}(f) = \mathscr{D}/f$ - на морфизмах. Функтор $i_{\mathscr{D}}$ обладает правым сопряженным функтором $i^*_{\mathscr{D}} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$.

На категории предпучков $\mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$ рассмотрим класс $W_{\mathscr{D}}$, состоящий из морфизмов предпучков $f : X \to Y$, для которых отображения классифицирующих пространств (или нервов) категорий $\mathrm{B}\,\mathscr{D}/f : \mathrm{B}\,\mathscr{D}/X \to \mathrm{B}\,\mathscr{D}/Y$ являются слабыми эквиваленостями. Ясно, что $W_{\mathscr{D}} = i^{-1}_{\mathscr{D}}(W_\infty)$.

Поскольку функтор $i_{\mathscr{D}}$ переводит морфизмы из $W_{\mathscr{D}}$ в морфизмы из W_∞, то он индуцирует функтор между категориями частных $\overline{i_{\mathscr{D}}} : W^{-1}_{\mathscr{D}}\mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}} \to W^{-1}_\infty\mathrm{Cat} \simeq \mathrm{Hot}$.

1. Категория $\mathscr{D}$ называется слабо тестовой, если функтор $\overline{i_{\mathscr{D}}}$ является эквивалентностью категорий.

2. Категория $\mathscr{D}$ называется локально тестовой если для каждого $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ комма-категория $\mathscr{D}/a$ является слабо тестовой.

3. Категория $\mathscr{D}$ называется тестовой, если она слабо тестовая и локально тестовая.

4. Категория $\mathscr{D}$ строго тестовая, если она тестовая и если функтор $i_{\mathscr{D}} : \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}} \to \mathrm{Hot}$ перестановочен с конечными произведениями.

Если $\mathscr{D}$ - тестовая категория, то категория $\mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$ обладает замкнутой модельной структурой, в которой корасслоениями будут мономорфизмы, а слабыми эквивалентностями - все морфизмы принадлежащие классу $W_{\mathscr{D}}$. Ясно, что в этом случае будет существовать эквивалентность гомотопических категорий $W^{-1}\mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}} \simeq \mathrm{Hot}$. Эта модельная структура называется стандартной [39].

В работе [15] было доказано, что категория кубических множеств является тестовой. Отсюда вытекает, что на категории кубических множеств существует стандартная модельная структура. Слабыми эквивалентностями кубических множеств относительно этой модельной стрктуры будут морфизмы $f : X \to Y$, для которых соответствующее симплициальное отображение нервов категорий $\mathrm{B}(\square/f) : \mathrm{B}(\square/X) \to \mathrm{B}(\square/Y)$ является слабой эквивалентностью симплициальных множеств.

Следствие 6.3 *Пусть $f : X \to Y$ – слабая эквивалентность кубических множеств относительно стандартной модельной структуры. Тогда для всякой локальной системы $L : \square/Y \to \mathrm{Ab}$ и $n \geqslant 0$ гомоморфизм $H^n(Y, L) \to H^n(X, L \circ (\square/f))$ будет изоморфизмом.*

Доказательство Пусть $\partial : \Delta/\mathrm{B}\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ обозначает функтор, сопоставляющий каждому симплексу $c_0 \to \cdots \to c_n$ объект $c_n \in \mathscr{C}$. Хорошо известно, что функтор ∂ асферический, и значит $H_n^{simp}(\partial/c) \cong H_n^{simp}(\mathrm{pt})$, откуда для каждого функтора $G : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ имеет место естественный изоморфизм $\lim^n_{\mathscr{C}} G \xrightarrow{\cong} \lim^n_{\mathscr{C}} G\partial$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Delta/\mathrm{B}(\square/X) \arrow[r, "\Delta/\mathrm{B}(\square/f)"] \arrow[d, "\partial"'] & \Delta/\mathrm{B}(\square/Y) \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, dashed, "L\partial"] & \\
\square/X \arrow[r, "\square/f"'] & \square/Y \arrow[r, "L"'] & \mathrm{Ab}
\end{tikzcd}$$

Из критерия слабой эквивалентности [55, Chapter II, §3, Proposition 4] следует, что для всякой слабой эквивалентности симплициальных множеств соответствующий ей гомоморфизм групп когомологий с коэффициентами в локальной системе будет изоморфизмом. Так как, по условию, симплициальное отображение $\mathrm{B}(\square/f) : \mathrm{B}(\square/X) \to \mathrm{B}(\square/Y)$ – слабая эквивалентность, то имеет место изоморфизм $\varprojlim^n L\partial \xrightarrow{\cong} \varprojlim^n L\partial(\Delta/\mathrm{B}(\square/f))$.

Коммутативная диаграмма естественных гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim^n L(\Box/f)\partial & \varprojlim^n L\partial(\Delta/\mathrm{B}(\Box/f)) \arrow[l, "="'] & \varprojlim^n L\partial \arrow[l, "\cong"'] \\
\varprojlim^n_{\Box/X} L\circ(\Box/f) \arrow[u, "\cong"] & & \varprojlim^n_{\Box/Y} L \arrow[ll] \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

показывает, что гомоморфизм в нижней строке является изоморфизмом. Отсюда вытекает, что $H^n(Y,L) \to H^n(X, L\circ(\Box/f))$ – изоморфизм для всех $n \geqslant 0$. $\Box$

Пример 6.2 *Морфизмы между стандартными кубами не сохраняют группы когомологий. Например, для (единственного) морфизма между стандартными одномерным и нульмерным кубами $s = \Box(\sigma_1^1) : \Box^1 \to \Box^0$ обратный слой $\overleftarrow{f}(y)$ куба $\tilde{y} : \Box(\sigma_1^1) : \Box^1 \to \Box^0$ изоморфен кубическому множеству $\Box^1 \times \Box^1$ имеющему ненулевые группы гомологий $H_2(\Box^1\times\Box^1, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Box^1\times\Box^1,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ [35, Example 1]. Значит существуют такие ковариантная система $F : \Box/\Box^0 \to \mathrm{Ab}$ и число $n > 0$, что гомоморфизм групп $H^n(\Box^1, s^*F) \to H^n(\Box^0, F)$ не будет изоморфизмом.*

Морфизм кубических множеств $s = \Box(\sigma_1^1) : \Box^1 \to \Box^0$ является слабой эквивалентностью. Для всякой локальной системы F на кубической точке $\Box^0$, $H^n(\Box^0, F)$ и $H^n(\Box^1, F)$ будут равны 0 при $n > 0$, и гомоморфизм $H^0(\Box^0, F) \to H^0(\Box^1, s^*F)$ будет изоморфизмом.

Замечание 6.3 *Для произвольной малой категории $\mathscr{D}$ мы можем рассмотривать категорию $\mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$ как категорию со слабыми эквивалентностями, в смысле [13]. Морфизм $f : X \to Y$ объявляется слабой эквивалентностью, если индуцированное симплициальное отображение $\mathrm{B}(\mathscr{D}/X) \to \mathrm{B}(\mathscr{D}/Y)$ - слабая эквивалентность симплициальных множеств. Если взять за определение $H^n(X, L) := \varprojlim^n_{\mathscr{D}/X} L$ групп когомологий $\mathscr{D}$-множества $X \in \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$ с коэффициентами в локальной системе $L : \mathscr{D}/X \to \mathrm{Ab}$, то утверждение следствия 6.3 и его доказательство останется верным, если вместо $\Box$ подставить любую малую категорию $\mathscr{D}$.*

6.3 Спектральная последовательность морфизма кубических множеств для когомологий с локальными коэффициентами

Теорема 5.1 позволяет применить предложение 3.9, следствие 6.3 и замечание 3.4 для построения спектральной последовательности морфизма кубических множеств для когомологий с коэффициентами в локальной системе абелевых групп. Рассматриваются слабые эквивалентности кубических множеств принадлежащие стандартной модельной структуре.

Следствие 6.4 *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм кубических множеств, морфизмы диаграммы обратных слоев которого являются слабыми эквивалентностями. Тогда для всякой локальной системы абелевых групп $G : \square/Y \to \mathrm{Ab}$ существует спектральная последовательность*

$$E_2^{pq} = H^p\left(Y, \{H^q(\overleftarrow{f}(\sigma), f_\sigma^* G)\}^{-1}_{\sigma\in\square/Y}\right) \Rightarrow H^{p+q}(X, G),$$

где $f_\sigma^* G$ равно композиции $\square/\overleftarrow{f}(\sigma) \xrightarrow{\square/f_\sigma} \square/X \xrightarrow{G} \mathrm{Ab}$.

7 Гомологии полукубического множества как гомологии кубического

Категория $\square_+$ имеет множество объектов $\mathrm{Ob}\square_+ = \mathrm{Ob}\square$. Ее морфизмами служат все мономорфизмы категории кубов $\square$. Полукубическим множеством называется функтор $\square_+^{op} \to \mathrm{Set}$. Мы доказываем в этой части, что гомологии полукубического множества с коэффициентами в контравариантной системе изоморфны гомологиям содержащего его универсального кубического множества.

7.1 Универсальное кубическое множество для заданного полукубического множества

Пусть $J : \square_+ \to \square$ – функтор вложения. Следующая лемма показывает, что этот функтор является виртуальным дискретным предрасслоением.

Лемма 7.1 *Для всякого $\mathbb{I}^n \in \mathrm{Ob}\square$ каждая компонента связности категории $\mathbb{I}^n/J$ имеет инициальный объект.*

Доказательство. Объекты категории $\mathbb{I}^n/J$ можно рассматривать как морфизмы $\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}^k$ категории $\square$. Морфизм между $\mathbb{I}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^p$ и $\mathbb{I}^n \xrightarrow{\beta} \mathbb{I}^q$ в этой категории задается с помощью коммутативного треугольника

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{I}^n \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathbb{I}^p \arrow[rr, tail, dashed, "\mu"] & & \mathbb{I}^q \end{tikzcd} \tag{22}$$

в которых μ – мономорфизм категории кубов $\square$. Обозначим этот морфизм категории $\mathbb{I}^n/J$ через $\alpha \xrightarrow{\mu} \beta$. Каждый морфизм $\mathbb{I}^n \xrightarrow{\beta} \mathbb{I}^q$ категории кубов допускает единственное разложение $\beta = \mu \circ \sigma$ в композицию эпиморфизма σ и мономорфизма μ. Обозначим эпиморфизм σ через $i(\beta)$, а мономорфизм μ через i_β. Получим морфизм $i(\beta) \xrightarrow{i_\beta} \beta$, причем множество морфизмов $i(\beta) \to \beta$ в категории $(\mathbb{I}^n/J)$ будет состоять из единственного элемента, равного i_β.

Разлагая морфизмы треугольника (22) в композиции эпиморфизмов и мономорфизмов категории кубов, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}^k \arrow[dr, "i_\alpha"'] & & \mathbb{I}^n \arrow[ll, two heads, "i(\alpha)"'] \arrow[rr, two heads, "i(\beta)"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & \mathbb{I}^m \arrow[dl, "i_\beta"] \\ & \mathbb{I}^p \arrow[rr, tail, "\mu"] & & \mathbb{I}^q & \end{tikzcd}$$

В этой диаграмме эпиморфизмы изображены стрелкой $\twoheadrightarrow$, а мономорфизмы – стрелкой $\rightarrowtail$. Так как разложение морфизма β в композицию эпиморфизма и мономорфизма единственно, то эта диаграмма приводит к равенствам:

$$i(\alpha) = i(\beta), \quad \mathbb{I}^k = \mathbb{I}^m, \quad \mu \circ i_\alpha = i_\beta.$$

Приходим к следующей коммутативной диаграмме в категории $\mathbb{I}^n/J$:

$$\begin{tikzcd} i(\alpha) \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_\alpha"'] & i(\beta) \arrow[d, "i_\beta"] \\ \alpha \arrow[r, "\mu"'] & \beta \end{tikzcd}$$

Отсюда вытекает, все объекты α категории $\mathbb{I}^n/J$, принадлежащие одной компоненте связности будут иметь одинаковый объект $i(\alpha)$, который будет эпиморфизмом в категории кубов. Этот объект будет инициальным объектом компоненты связности, содержащей объект α а морфизм $i_\alpha : i(\alpha) \to \alpha$ будет единственным морфизмом из этого объекта в объект α. $\square$

Далее, как в доказательстве леммы 7.1, для любого морфизма $\alpha : \mathbb{I}^m \to \mathbb{I}^n$ будем обозначать через $\mathbb{I}^m \overset{i(\alpha)}{\to} \mathbb{I}^p$ – эпиморфизм, а через $\mathbb{I}^p \overset{i_\alpha}{\to} \mathbb{I}^n$ – мономорфизм категории кубов, такие, что $\alpha = i_\alpha \circ i(\alpha)$. Для всякого семейства множеств $(S_i)_{i\in I}$ мы будем рассматривать его дизъюнктное объединение $\coprod\limits_{i\in I} S_i$ как множество, состоящее из пар (i, s), таких, что $s \in S_i$. Построим универсальное кубическое множество для полукубического множества

Предложение 7.2 *Пусть $X : \square_+^{op} \to Set$ – произвольное полукубическое множество. Тогда его левое расширение Кана $Lan^{J^{op}} X : \square^{op} \to \mathrm{Set}$ будет функтором, сопоставляющим каждому кубу $\mathbb{I}^n$ множество*

$$(Lan^{J^{op}} X)_n = \coprod_{\mathbb{I}^n \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}^k} X_k,$$

и каждому морфизму $\alpha : \mathbb{I}^m \to \mathbb{I}^n$ – отображение множеств

$$Lan^{J^{op}} \alpha = \alpha_* : \coprod_{\mathbb{I}^n \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}^k} X_k \to \coprod_{\mathbb{I}^m \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}^p} X_p,$$

принимающее значения $\alpha_*(\gamma, x) = (i(\gamma \circ \alpha), X(i_{\gamma\circ\alpha})(x))$.

Доказательство. Рассмотрим функтор $J : \square_+ \to \square$. По лемме 7.1 для всякого объекта $\mathbb{I}^n \in \square$ каждая компонента связности категории $\mathbb{I}^n/J$ имеет инициальный объект. Это позволяет использовать конструкцию из предложения 3.1 для построения функтора $Lan^{J^{op}} X$. Этот функтор на объектах $\mathbb{I}^n$ будет принимать значения $\coprod\limits_{\gamma\in init(\mathbb{I}^n/J)} XQ^{op}_{\mathbb{I}^n}$, где $init(\mathbb{I}^n/J)$ множество инициальных объектов компонентов связности категории $\mathbb{I}^n/J$, а $Q_{\mathbb{I}^n} : \mathbb{I}^n/J \to \square_+$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту $\mathbb{I}^n \to J(\mathbb{I}^p)$ категории $\mathbb{I}^n/J$ объект $\mathbb{I}^p \in \square_+$, а морфизму

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{I}^n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ J(\mathbb{I}^p) \arrow[rr, "J(\delta)"'] & & J(\mathbb{I}^q) \end{tikzcd}$$

– морфизм $\mathbb{I}^p \xrightarrow{\delta} \mathbb{I}^q$ категории $\square_+$. Отсюда следует, что $Lan^{J^{op}}X(\mathbb{I}^n) = \coprod\limits_{\mathbb{I}^n \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}^k} X_k$. Применение предложения 3.1 приводит к определению α_* как отображения множеств, делающего коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{\mathbb{I}^n \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}^k} X_k \arrow[r, dashed, "\alpha_*"] & \coprod\limits_{\mathbb{I}^m \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}^p} X_p \\
X_k \arrow[u, "in_\gamma"] \arrow[r, "X(i_{\gamma\circ\alpha})"'] & X_p \arrow[u, "in_{i(\gamma\circ\alpha)}"']
\end{tikzcd}$$

где in_γ – отображения в дизъюнктное объединения, определенные как $in_\gamma(x) = (\gamma, x)$. Эта диаграмма приводит к искомой формуле для отображения α_*. $\square$

Следствие 7.3 *Кубик $(\beta, y) \in (Lan^{J^{op}}X)_m$, состоящий из эпиморфизма $\beta : \mathbb{I}^m \to \mathbb{I}^p$ и элемента $y \in X_p$ будет вырожденным тогда и только тогда, когда $m > p$.*

Доказательство. Кубик (β, y) будет вырожденным тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм $\alpha : \mathbb{I}^m \to \mathbb{I}^n$ для $n = m - 1$ и элемент $(\gamma, x) \in \coprod\limits_{\mathbb{I}^n \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}^k} X_k$, такие, что $\alpha_*(\gamma, x) = (\beta, y)$. Эпиморфизм α будет равен отображению вырождения σ_i^m для некоторого i. Последнее равенство равносильно условию $(i(\gamma \circ \alpha), X(i_{\gamma\circ\alpha})(x)) = (\beta, y)$. Поскольку $i_{\gamma\alpha} \circ i(\gamma\alpha)$ – каноническое разложение $\gamma\alpha$ в композицию эпиморфизма и мономорфизма, и $\gamma\alpha$ – эпиморфизм, то $i(\gamma\alpha) = \gamma\alpha$ и $i_{\gamma\alpha} = 1_{\mathbb{I}^k}$. Приходим к выводу, что (β, y) – вырожденный, если и только если $\beta = \gamma\alpha$ и $y = x$, причем $k = p$, $n = m - 1$. Таким образом, если $m > p$, то $(\beta, y) = \alpha_*(\gamma, y)$, где $\alpha = \sigma_i^m : \mathbb{I}^m \to \mathbb{I}^{m-1}$, для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$. $\square$

Для всякого $n \geqslant 0$ множество n-мерных невырожденных кубиков кубического множества $Lan^{J^{op}}X$ равно $\{1_{\mathbb{I}^n}\} \times X_n$. Применяя предложение 7.2 к $\alpha = \delta_i^{n,\varepsilon}$, приходим к выводу, что граничный оператор $(\delta_i^{n,\varepsilon})_*$ переводит невырожденный кубик $(1_{\mathbb{I}^n}, x)$ в невырожденный кубик $(1_{\mathbb{I}^{n-1}}, X(\delta_i^{n,\varepsilon}))$. Получаем

Следствие 7.4 *Единица сопряжения $\eta_X : X \to (Lan^{J^{op}}X) \circ J^{op}$ определяет изоморфизм полукубического множества X и полукубического* *множества, состоящего из невырожденных кубиков и граничных операторов кубического множества $Lan^{J^{op}}X$.*

7.2 Гомологии полукубического множества как гомологии кубического

Пусть $X : \square_+^{op} \to Set$ – полукубическое множество, $Lan^{J^{op}}X : \square^{op} \to Set$ – соответствующее ему кубическое множество. Предложение 7.2 позволяет выяснить строение категории кубиков $\square/Lan^{J^{op}}X$.

Обозначим $Y = Lan^{J^{op}}X$. Поскольку $Y_n = \coprod\limits_{\gamma\colon \mathbb{I}^n \twoheadrightarrow \mathbb{I}^k} X_k$, то объекты категории кубиков $\square/Lan^{J^{op}}X$ состоят из пар (γ, x), где $\gamma : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}^k$ – эпиморфизм в категории кубов, а $x \in X_k$ – произвольный элемент полукубического множества X. Их можно рассматривать как пары морфизмов в категории $\mathrm{Set}^{\square^{op}}$:

$$\square^n \xrightarrow{\square(\gamma)} \square^k \overset{\widetilde{x}}{\to} X,$$

где γ - эпиморфизм в категории $\square$, а $x \in X_k$ - куб. Если $k = n$ и $\gamma = 1_{\mathbb{I}^n}$, то эта пара будет невырожденным кубом кубического множества $Lan^{J^{op}}X$. Морфизмы категории $\square/Lan^{J^{op}}X$ задаются с помощью коммутативных треугольников

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ \square^m \arrow[ur, "\widetilde{(\beta,y)}"] \arrow[rr, "\square(\alpha)"'] & & \square^n \arrow[ul, "\widetilde{(\gamma,x)}"'] \end{tikzcd}$$

означающих, что отображение $\alpha_* : Y_n \to Y_m$, определение которого дано в предложении 7.2, удовлетворяет условию $\alpha_*(\gamma, x) = (\beta, y)$. Это условие равносильно равенству $(i(\gamma \circ \alpha), X(i_{\gamma\circ\alpha})(x)) = (\beta, y)$, эквивалентное двум равенствам $(i(\gamma \circ \alpha) = \beta$ и $X(i_{\gamma\circ\alpha})(x)$.

Отсюда следует, что морфизмы $\widetilde{(\beta, y)} \to \widetilde{(\gamma, x)}$ можно рассматривать как коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \square^m \arrow[r, "\square(\beta)"] \arrow[d, "\square(\alpha)"'] & \square^p \arrow[r, "\widetilde{y}"] \arrow[d, "\square(\mu)"'] & X \\ \square^n \arrow[r, "\square(\gamma)"'] & \square^k \arrow[ur, "\widetilde{x}"'] & \end{tikzcd} \tag{23}$$

в которой μ – мономорфизм, а β и γ – эпиморфизмы категории кубов. Коммутативность этой диаграммы равносильна выполнению трех равенств $i(\gamma \circ \alpha) = \beta$, $i_{\gamma\circ\alpha} = \mu$, $\widetilde{x}\Box(\mu) = \widetilde{y}$, равносильных равенству $\alpha_*(\gamma, x) = (\beta, y)$.

Предложение 7.5 *Объекты категории $\Box/Lan^{J^{op}}X$ можно задавать с помощью пар морфизмов $(\mathbb{I}^n \xrightarrow{\gamma} \mathbb{I}^k, \Box^k \xrightarrow{\widetilde{x}} X)$, в которых γ – эпиморфизм в категории кубов. Морфизмами $(\mathbb{I}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{I}^p, \Box^p \xrightarrow{\widetilde{y}} X) \to (\mathbb{I}^n \xrightarrow{\gamma} \mathbb{I}^k, \Box^k \xrightarrow{\widetilde{x}} X)$, служат пары (α, μ), состоящими из морфизма $\mathbb{I}^m \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^n$ и мономорфизма $\mathbb{I}^p \xrightarrow{\mu} \mathbb{I}^k$ категории кубов, делающими коммутативными диаграммы (23).*

Для сравнения гомологий нам понадобится следующее

Предложение 7.6 *Функтор $J_* : \Box_+/X \to \Box/Lan^{J^{op}}X$, сопоставляющий каждому кубику $\widetilde{x} : \Box^n_+ \to X$ кубик $\widetilde{(1_{\mathbb{I}^n}, x)}$, обладает левым сопряженным $S : \Box/Lan^{J^{op}}X \to \Box_+/X$, заданном на объектах как $S(\gamma, \widetilde{x}) = \widetilde{x}$, а на морфизмах – $S(\alpha, \mu) = \mu$.*

Доказательство. Если придерживаться определения объектов и морфизмов категории $\Box/Lan^{J^{op}}X$ показанного с помощью диаграммы (23), то это значительно упростит доказательство. Утверждение будет следовать из универсальности стрелки $\widetilde{(\gamma, x)} \xrightarrow{(\gamma, \Box(1_{\mathbb{I}^k}))} J_*(\tilde{x}) = (1_{\mathbb{I}^k}, \tilde{x})$, для всякого $\widetilde{(\gamma, x)} \in \Box/Lan^{J^{op}}X$. Сопряженность функторов вытекает из [47, Theorem IV.1.2, Page 83]. $\Box$

В работе [45] дано определение групп гомологий полукубического множества. Аналогичным образом можно дать определение гомологий полукубического множества с коэффициентами в контравариантной системе объектов F, как гомологий комплекса состоящего из объектов $C_n(F) = F(\mathbb{I}^n)$ и дифференциалов $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i(F(\delta_i^{n,0}) - F(\delta_i^{n,1}))$. Для всякого полукубического объекта $F : \Box_+^{op} \to \mathcal{A}$ тензорное произведение F и проективной резольвенты функтора $\Delta_{\Box_+}\mathbb{Z}$, используемой в доказательстве [45, предложение 4.2], будет равно этому комплексу $C_*(F)$. Это приводит к обобщению утверждения [45, теорема 4.3] и дает изоморфизм значений $\varinjlim_n^{(\Box_+/X)^{op}} F$ и объектов гомологий полукубического множества

X с коэффициентами в F, которые мы обозначим через $H_n^+(X,F)$. Следующее утверждение показывают, что они изоморфны гомологиям универсального кубического множества, содержащего X, с коэффициентами в $F \circ S^{op}$.

Теорема 7.7 *Пусть X – полукубическое множество. Рассмотрим функтор $S : \square/Lan^{J^{op}}X \to \square_+/X$, сопоставляющий каждому кубику $(\gamma, \widetilde{x})$ кубик $\widetilde{x}$, а морфизму (α, μ) – морфизм μ. Тогда для всякого функтора $F : (\square_+/X)^{op} \to Ab$ существуют естественные изоморфизмы*

$$H_n(Lan^{J^{op}}X, FS^{op}) \to H_n^+(X,F).$$

для всех $n \geqslant 0$.

Доказательство. По теореме 5.1 существуют естественные изоморфизмы между $H_n(Lan^{J^{op}}X, FS^{op})$ и $\varinjlim_n^{(\square/Lan^{J^{op}}X)^{op}} FS^{op}$. Поскольку S имеет правый сопряженный, то категории $S/\widetilde{x}$ имеют гомологии точки, и значит, согласно [52, Theorem 2.3], канонические морфизмы

$$\varinjlim_n^{(\square/Lan^{J^{op}}X)^{op}} FS^{op} \to \varinjlim_n^{(\square_+/X)^{op}} F$$

будут изоморфизмами. Отсюда следует существование искомого изоморфизма. $\square$

8 Заключение

В работе исследованы гомологии кубических множеств с коэффициентами в контравариантных системах, морфизмы которых не должны быть изоморфизмами. Установлены следующие факты:

- Эти гомологии инвариантны относительно морфизма между кубическими множествами при переходе к прямому образу системы коэффициентов.
- Существует критерий инвариантности этих гомологий при переходе к обратному образу.
- В случае локальных систем эти гомологии ведут себя как сингулярные кубические гомологии Серра, и гомологии полукубических множеств с коэффициентами в контравариантных системах можно рассматривать как кубические гомологии.

- Существует спектральная последовательность для копредела кубических множеств.
- Построена спектральная последовательность для морфизма между кубическими множествами с локальными системами.
- Гомологии малых категорий можно вычислять как кубические гомологии.
- Когомологии Бауэса-Виршинга с коэффициентами в натуральных системах изоморфны кубическим когомологиям с коэффициентами в ковариантных системах.

Мы надеемся, что кубические гомологии с коэффициентами в контравариантных системах объектов абелевых категория с точными копроизведениями найдут приложения в алгебраической топологии и при исследовании математических моделей вычислительных систем и процессов.

Список литературы

[1] H. Barcelo, V.Capraro, J.A. White *Discrete homology theory for metric spaces*, Bull. London Math. Soc. **46** (2014), 889-905.

[2] H. Barcelo, C. Greene, A. S. Jarrah, V. Welker, *Discrete cubical and path homologies of graphs*, **2**: 3 (2019), 417-437.

[3] H. Barcelo, C. Greene, A. S. Jarrah, V. Welker, *Homology Groups of Cubical Sets with Connections*, Appl. Categor. Struct., **29**:3 (2021), 415-429.

[4] H. Barcelo, C. Greene, A.S. Jarrah, V. Welker, *On the vanishing of discrete singular cubical homology for graphs*, SIAM J. Discrete Math. (Accepted, 2020).

[5] H.-J. Baues, G. Wirsching, *Cohomology of small categories*, J. Pure Appl. Algebra, **38** (1985), 187-211.

[6] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[7] R. Brown, P.J. Higgins, *On the algebra of cubes*, J. Pure Appl. Algebra **21** (1981), 233-260.

[8] R. Brown, P.J. Higgins, R. Sivera, *Nonabelian Algebraic Topology*, European Mathematical Society, Zürich, 2011.

[9] G. Brunerie, A. Ljungström, A. Mörtberg, *Synthetic Integral Cohomology in Cubical Agda*, 30th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic. Saarbrücken/Wadern: Dagstuhl Publishing (2022) 11:1-11:19.

[10] U. Buchholtz, E. Morehouse, *Varieties of Cubical Sets*, Höfner, P., Pous, D., Struth, G. (eds) Relational and Algebraic Methods in Computer Science. RAMICS 2017. Lecture Notes in Computer Science, **10226**, Springer, Cham, 2017, 77-92.

[11] U. Buchholtz, K.-B. Hou (Favonia), *Cellular Cohomology in Homotopy Type Theory*, Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS '18. Association for Computing Machinery, New York, 2018, 521-529.

[12] G. Carlsson, *Topology and data*, Bull. Am. Math. Soc. **46** (2009) 255-308.

[13] W. Chachólski, J. Scherer, *Homotopy theory of diagrams*, American Mathematical Society, Providence RI, 2001.

[14] A. Choudhary, M. Kerber, S. Raghvendra, *Improved approximate Rips filtrations with shifted integer lattices and cubical complexes*, J. Appl. Comput. Topol. **5** (2021), 425-458.

[15] D.-C. Cisinski, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque **308**, Société Mathématique de France, Paris, 2006.

[16] S. Covez, *On the conjectural Leibniz cohomology for groups*. Journal of K-Theory: K-Theory and Its Applications to Algebra, Geometry, and Topology, **10**:3 (2012), 519–563.

[17] S. Covez, *Rack homology and conjectural Leibniz homology*, New York, 2019. 24 p. (Preprint, Cornell Univ.); https://arxiv.org/abs/1402.1625

[18] S. Covez, M. Farinati, V. Lebed, D. Manchon, *Bialgebraic approach to rack cohomology*, New York, 2019. 24 p. (Preprint, Cornell Univ.); https://arxiv.org/abs/1905.02754

[19] H. Edelsbrunner, D. Letscher, A. Zomorodian, *Topological persistence and simplification*, Discrete Comput. Geom. **28**:4 (2002), 511-533.

[20] S. Eilenberg, S. MacLane, *Acyclic Models*, Amer. J. Math. **75**:1 (1953), 189-199.

[21] U. Fahrenberg, *A Category of Higher-Dimensional Automata*, V. Sassone (eds), Foundations of Software Science and Computational Structures. FoSSaCS 2005. Lecture Notes in Computer Science **3441**, Springer, Berlin, Heidelberg (2005), 187-201.

[22] L. Fajstrup, M. Raußen, E. Goubault, *Algebraic topology and concurrency*, Theor. Comput. Sci. **357**:1-3 (2006) , 241-278.

[23] L. Fajstrup, E. Goubault, E. Haucourt, S. Mimram, M. Raussen, *Directed algebraic topology and concurrency.* With a foreword by M. Herlihy and a preface by S. Mimram. Springer, Cham, 2016.

[24] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **35**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[25] I. Gálvez-Carrillo, F. Neumann, A. Tonks, *André spectral sequences for Baues-Wirsching cohomology of categories*, J. Pure Appl. Algebra **216** (2012), 2549–2561.

[26] I. Gálvez-Carrillo, F. Neumann, A. Tonks, *Thomason cohomology of categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **217** (2013), 2163-2179.

[27] I. Gálvez-Carrillo, F. Neumann, A. Tonks, *Gabriel–Zisman Cohomology and Spectral Sequences*, Applied Categorical Structures **29** (2021), 69-94.

[28] P. Gaucher, E. Goubault, *Topological deformation of higher dimensional automata*, Homology Homotopy Appl. **5**:2 (2003), 39-82.

[29] M. Grandis, *Directed combinatorial homology and noncommutative tori*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **138** (2005), 233-262.

[30] M. Grandis, L. Mauri *Cubical Sets and their site*, Homology Homotopy Appl., **11**:8 (2003), 71-144.

[31] M. Grandis, *Combinatorial homology in a perspective of image analysis*, Georgian Math. J. **10**:1 (2003), 77-98.

[32] M. Grandis, *Directed Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[33] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'Algèbre homologique, I*, Tohoku Math. J. (2) **9**:2 (1957), 119-221. DOI: 10.2748/tmj/1178244839

[34] A. Grothendieck, *Pursuing Stacks*, New York, 2021. 528 p. (Preprint, Cornell Univ.); https://arxiv.org/abs/2111.01000

[35] A. A. Husainov, *Homology of cubical sets*, Appl. Categor. Struct. **27**:2 (2019), 199-216.

[36] A. A. Husainov, *The Homology of Partial Monoid Actions and Petri Nets*, Appl. Categor. Struct. **21**:6 (2013), 587-615.

[37] S. S. Jamil, D. Ali, *Digital Hurewicz theorem and digital homology theory*, Turk. J. Math. **44**:3 (2020), 739-759.

[38] S. S. Jamil, P. C. Staecker, D. Ali, *Computability of digital cubical singular homology of c_1-digital images*, 2022. 26 p. (Preprint, Cornell Univ.); https://arxiv.org/abs/2205.07457

[39] J. F. Jardine, *Categorical Homotopy Theory*, Homology Homotopy Appl. **8**:1 (2006) , P. 71-144.

[40] T. Kahl, *Labeled homology of higher-dimensional automata*, J. Appl. Comput. Topol. **2**:3-4 (2018), 271-300.

[41] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek, *Computational homology*, Applied Mathematical Sciences **157**, Springer, New York, 2004.

[42] D. M. Kan, *Abstract homotopy I*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **41** (1955), 1092-1096.

[43] A. A. Khusainov, *Cohomology of small categories with coefficients in an Abelian category with exact products*, Sib. Math. J. **30**:4 (1989); translation from Sib. Mat. Zh. **30**:4 (1989), 210-215.

[44] A. A. Khusainov, *Homotopy equivalence of coverings and the spectral sequence of a fibration*, Sib. Math. J. **32**:1 (1991), 116-122; translation from Sib. Mat. Zh. **32**:1 (1991), 141-147.

[45] A. A. Khusainov, *Homology groups of semicubical sets*, Sib. Math. J. **49**:1 (2008), 180-190; translation from Sib. Mat. Zh. **49**:1 (2008), 224-237.

[46] V. Lebed, L. Vendramin, *Homology of left non-degenerate set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation*, Adv. Math. **304** (2017), 1219-1261.

[47] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer, New York, 1998.

[48] S. Mac Lane, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **114**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[49] G. Maltsiniotis, *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque **301**, Société Mathématique de France, Paris, 2005.

[50] G. Maltsiniotis, *La catégorie cubique avec connexions est une catégorie test stricte*, Homology Homotopy Appl. **11**:2 (2009), 309-326.

[51] M. Niethammer, W. D. Kalies, K. Mischaikow, A. Tannenbaum, *On the detection of simple points in higher dimensions using cubical homology*, IEEE Transactions on Image Processing **15**:8 (2006), 2462-2469.

[52] U. Oberst, *Homology of categories and exactness of direct limits*, Math. Z. **107** (1968), 87-115.

[53] I. Patchkoria, *Cubical approach to derived functors*, Homology Homotopy Appl. **14**:1 (2012), 133-158.

[54] P. Pilarczyk, K. Stolot, *Excision-preserving cubical approach to the algorithmic computation of the discrete Conley index*, Topology and its Applications **155** (2008), 1149-1162.

[55] D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math. **43**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[56] J. P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*, Ann. of Math. **54** (1951), 425–505.

[57] A. Ṡwiątek, *Category of cubical objects and category of simplicial objects*, Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math. **22** (1981), 307-316.