СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 30, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1989

УДК 513.83

А. А. ХУСАИНОВ

КОГОМОЛОГИИ МАЛЫХ КАТЕГОРИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АБЕЛЕВОЙ КАТЕГОРИИ С ТОЧНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ

Со всякой индуктивной системой малых категорий $\mathscr{C}_i$ и диаграмм F_i над ними, принимающих значения в абелевой категории с точными произведениями, связана спектральная последовательность, имеющая вторым членом $\lim^*\{\lim^* F_i\}$. В работе находятся условия, при которых она сходится к производным функтора предела $\lim^n F$ диаграммы F над $\operatorname{colim}\{\mathscr{C}_i\}$, индуцированной индуктивной системой $\{F_i\}$.

Следует заметить, что в данной работе термины «диаграмма», «функтор», «индуктивная система», «проективная система» эквивалентны. То же самое относится к пределам — копредел будет называться также прямым либо индуктивным пределом, а предел — обратным либо проективным. Функтор, сопоставляющий каждой категории дуальную категорию, будет обозначаться индексом ор сверху.

1. Критерий lim-ацикличности проективных систем, составленных из проекций произведений

Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория с точными произведениями. Существует символический функтор морфизмов [1, с. 145] $\operatorname{Hom}\colon \mathrm{Ab}^{op}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$. Для произвольной свободной абелевой группы L функтор $\operatorname{Hom}(L, -)$ точен, поэтому [2, с. 43] частные производные по первому аргументу $R_1^1\operatorname{Hom}(G, A)$ можно рассматривать как когомологический функтор от A. Положим по определению $\operatorname{Ext}(G, A)=R_1^1\operatorname{Hom}(G, A)$.

Категория $\mathscr{A}$ определяет некоторый класс $\mathscr{F}\mathscr{A}\subset\mathrm{Ab}$, состоящий из всех абелевых групп $G\in\mathrm{Ab}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Hom}(G, A)=\operatorname{Ext}(G, A)=0$ для любого $A\in\mathscr{A}$.

Если категория $\mathscr{A}$ обладает точными произведениями и достаточным числом инъективных объектов, а функтор $\operatorname{Hom}(-, A)$ точен при любом инъективном A, то из $\operatorname{Hom}(G, A)=0$ для всех A следует, что $\operatorname{Ext}(G, A)=0$. Тогда класс $\mathscr{F}\mathscr{A}\subset\mathrm{Ab}$ является классом Серра, например в случае категории $\mathscr{A}$ компактных абелевых групп класс $\mathscr{F}\mathscr{A}$ тривиален. Если $\mathscr{A}$ — категория R-модулей над кольцом R с 1, то $\mathscr{F}\mathscr{A}$ состоит из таких абелевых групп $G\in\mathrm{Ab}$, что для любого R-модуля A тензорное произведение $G\otimes A$ равно нулю.

Теорема 1.1. *Пусть заданы диаграмма множеств $\{E_i\}$ над малой категорией I и абелева категория $\mathscr{A}$ с точными произведениями. Тогда эквивалентны следующие свойства:*

а) *для всех $n>0$ верно $\operatorname{colim}_n\{LE_i\}\in\mathscr{F}\mathscr{A}$, где LE_i — свободная абелева группа, порожденная множеством E_i, а colim_n — n-я производная функтора копредела;*

б) *для любой индуктивной системы над I в $\mathrm{Ens}/\mathscr{A}$ семейств $A_i\colon E_i\to\mathscr{A}$ проективная система над I^{op} $\bar{A}(i)=\prod A_i=\lim A_i$ lim-ациклична, где $\mathrm{Ens}/\mathscr{A}$ состоит из семейств $E\to\mathscr{A}$, а морфизмы между семействами — коммутативные треугольники с концом в $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть E — множество. Распространим функтор Hom до функтора $\mathrm{Hom}_E\colon (E\,\mathrm{Ab})^{\mathrm{op}}\times E\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ по формуле $\mathrm{Hom}_E(G, A)=\prod \mathrm{Hom}(G(e), A(e))$, где произведение берется по всем $e\in E$. Пусть $\{\lambda_i\colon E_i\to E\}$ — копредел индуктивной системы $\{E_i\}$, а A — копредел семейств $A_i\in\mathrm{Ens}/\mathscr{A}$. Применяя лемму 1.2, доказываемую ниже, к функтору $\mathrm{Hom}_E(-, A)$, получим пару спектральных последовательностей, сходящихся к одному пределу, со вторыми членами

$$\lim{}^p\left\{\mathrm{Ext}^q\left(\mathrm{Lan}^{\lambda_i}Z\lambda_i, A\right)\right\},\quad \mathrm{Ext}^p_E\left(\mathrm{colim}_q\left\{\mathrm{Lan}^{\lambda_i}Z\lambda_i\right\}, A\right),$$

где Z принимает постоянное значение $Z\in\mathrm{Ab}$ на каждом $e\in E$, а Lan — левое расширение Кана [3]. Так как $\mathrm{Lan}^{\lambda_i}Z\lambda_i e$ — свободная группа $L\lambda_i^{-1}(e)$, то $\mathrm{Ext}^q\left(\mathrm{Lan}^{\lambda_i}Z\lambda_i, A\right)=0$ при $q>0$. Отсюда приходим к короткой точной последовательности

$$0\to\mathrm{Ext}_E\left(\mathrm{colim}_{n-1}\left\{\mathrm{Lan}^{\lambda_i}Z\lambda_i\right\}, A\right)\to\lim{}^n\left\{\prod A_i\right\}\to$$
$$\to\mathrm{Hom}_E\left(\mathrm{colim}_n\left\{\mathrm{Lan}^{\lambda_i}Z\lambda_i\right\}, A\right)\to 0$$

для всех $n>0$.

Индуктивная система $\{LE_i\}$ распадается в прямую сумму индуктивных систем $\{L\lambda_i^{-1}(e)\}$ над I, поэтому $\mathrm{colim}_n\{LE_i\}\cong\sum\mathrm{colim}_n\{L\lambda_i^{-1}(e)\}\in\in\mathscr{P}\mathscr{A}$, если и только если $\mathrm{colim}_n\{L\lambda_i^{-1}(e)\}\in\mathscr{P}\mathscr{A}$, для всех $e\in E$. Остается заметить, что $\mathrm{Hom}_E\left(\mathrm{colim}_n\ \left\{\mathrm{Lan}^{\lambda_i}Z\lambda_i\right\}, A\right)$ — произведение объектов $\mathrm{Hom}\left(\mathrm{colim}_n\{L\lambda_i^{-1}e\}, A(e)\right)$, и $\mathrm{Ext}_E(B, A)=\prod\mathrm{Ext}(Be, Ae)$ при $B\in E\,\mathrm{Ab}$, так как проективная резольвента B есть семейство проективных резольвент объектов $B(e)$. Следовательно, если $\lim^n\{\prod A_i\}=0$ при $n>0$, то $\mathrm{Hom}\left(\mathrm{colim}_n\{L\lambda_i^{-1}e\}, A(e)\right)$ и $\mathrm{Ext}\left(\mathrm{colim}_{n-1}\{L\lambda_i^{-1}e\}, A(e)\right)=0$ при $e\in E$, и наоборот. (В абелевой категории $\prod A(e)=0$ влечет $A(e)=$ $=0$, так как $\prod\mathscr{A}(A', A(e))\cong\mathscr{A}(A', \prod A(e))$ по определению произведения для всех $A'\in\mathscr{A}$).

Лемма 1.2. *Пусть $N\colon\mathscr{B}^{\mathrm{op}}\to\mathscr{A}$ — функтор между абелевыми категориями, перестановочный с пределами, а I — малая категория. Тогда если $\mathscr{B}$ обладает точными суммами и достаточным числом проективных объектов, а $\mathscr{A}$ допускает точные произведения, то существуют спектральные функторы $\lim^p\circ R^qN$ и $R^pN\circ\mathrm{colim}^{\mathrm{op}}_q$, лежащие в первой четверти $(p,\ q\geqslant 0)$ и сходящиеся к правым производным от композиции $N\circ$ $\circ\,\mathrm{colim}^{\mathrm{op}}$, где R^n обозначают правые производные* [2] *при $n\geqslant 0$.*

Доказательство. Обозначим через $I\mathscr{B}$ категорию диаграмм из I в $\mathscr{B}$. Функтор colim переводит проективные объекты из $I\mathscr{B}$ в проективные объекты категории $\mathscr{B}$ как сопряженный слева к точному функтору диагонали, поэтому $R^pN\circ\mathrm{colim}^{\mathrm{op}}_q\Rightarrow R^{p+q}(N\circ\mathrm{colim}^{\mathrm{op}})$ согласно [2].

Для любого функтора $T\colon I\to\mathscr{B}$ существует проективная резольвента T^n такая, что объекты $T^n(i)$ проективны и, если N переводит суммы в произведения, то проективная система $\{N(T^n(i))\}_{i\in I}$ $\lim_I$-ациклична для любого $n\geqslant 0$. Построим ее по способу, описанному в [4]. Для любого объекта $T(i)\in\mathscr{B}$ выбираем проективный объект $A(i)\in\mathscr{B}$ и эпиморфизм $A(i)\to T(i)$, положим $T^0(i)=\sum\limits_{i_0\to i}A(i_0)$, где сумма берется по всем морфизмам в i, принадлежащим категории I. Закон T^0 является функтором, будучи левым расширением Кана [3] функтора A вдоль вложения $\mathrm{Ob}(I)\subset I$ максимальной дискретной подкатегории $\mathrm{Ob}(I)$ из I. Функтор T^1 получается применением той же конструкции к ядру естественного преобразования $T^0\to T$, функтор T^n — к ядру естественного преобразования $T^{n-1}\to T^{n-2}$, $n\geqslant 2$. Вследствие перестановочности N с пределами справедливо соотношение

$$N(T^0(i)) = N\Big(\sum_{i_0\to i} A(i_0)\Big) \cong \prod_{i_0\to i} N(A(i_0)).$$

Но всякая проективная система $I^{op}\to\mathcal{A}$ вида $\prod_{i_0\to i} B(i_0)$ $\lim_I$-ациклична. Аналогично при $n\geqslant 1$ lim-ациклична проективная система $\{N(T^n(i))\}_{i\in I}$.

Рассмотрим гиперкогомологии [2] lim по отношению к комплексу $K^n = N\circ T^n$:

$$I_2^{p,q} = H^p(\lim{}^q K), \quad II_2^{p,q} = \lim{}^p H^q(K).$$

Вырождение первой спектральной последовательности есть следствие $\lim_I$-ацикличности $\{N\circ T^n(i)\}_{i\in I}$ и приводит к спектральной последовательности $\lim^p H^q(K) \Rightarrow H^{p+q}(\lim K)$, но $\lim K^n = \lim(N\circ T^n) \cong N(\operatorname{colim} T^n)$, откуда $H^n(\lim K) \cong R^n(N\circ \operatorname{colim}^{op})(T)$. Наконец, $H^q(K) = H^q(N(T^n)) = R^qN(T)$, следовательно,

$$\lim{}^p R^qN(T) \Rightarrow R^{p+q}(N\circ \operatorname{colim}^{op})(T),$$

что заканчивает доказательство леммы 1.2.

2. Основная спектральная последовательность

Пусть π — функтор из малой категории P в произвольную категорию T. С каждым объектом $X\in T$ связана комма-категория [3], которую мы обозначим через π/X. Любой объект из π/X представляется парой (p, α), где p — объект из P, а $\alpha\colon \pi(p)\to X$ — морфизм категории T. Любой морфизм π/X из (p, α) в (p', α') представляется тройкой (f, α, α'), где $f\colon p\to p'$ — морфизм, удовлетворяющий соотношению $\alpha'\circ\pi(f) = \alpha$. Если π — полное вложение, то мы будем иногда писать P/X вместо π/X. Забывающий функтор [3] из π/X в P обозначим через QX. Таким образом, $QX(p, \alpha) = p$ и $QX(f, \alpha, \alpha') = f$.

Рассмотрим диаграмму $\{X^i\}_{i\in I}$ в T над малой категорией I. Пусть $\{\lambda_i\colon \pi/X^i \to \operatorname{colim}\{\pi/X^i\}\}$ — копредел категорий π/X^i.

Теорема 2.1. *Если $\mathcal{A}$ — абелева категория с точными произведениями и при любом $p\in P$ диаграмма над I свободных абелевых групп, порожденных множествами $T(\pi(p), X^i)$, содержит все colim_n, $n>0$, в $\mathcal{SA}$, то для любой проективной системы G над $\operatorname{colim}\{\pi/X^i\}$ со значениями в $\mathcal{A}$ существует спектральная последовательность типа $E_2^{s,t} = \lim^s\{\lim^t G\lambda_i\}$, лежащая в первой четверти и сходящаяся к $\lim^{s+t}G$.*

Доказательство. Для любого функтора $G\colon \operatorname{colim}\{\pi/X^i\}\to\mathcal{A}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}$ с точными произведениями можно образовать бифунктор $\{\Pi G\lambda_i\}\colon I^{op}\times P\to\mathcal{A}$, сопоставляющий паре (i, p) произведение объектов $G\lambda_i(g)\in\mathcal{A}$ по всем $g\in T(\pi(p), X^i)$. Значение $\{\Pi G\lambda_i\}$ на (i, p) изоморфно $\operatorname{Ran}_{QX^i} G\lambda_i(p)$, поэтому, применяя предложение 2.2 k $\{\prod G\lambda_i\}$, приходим к спектральной последовательности

$$E_2^{s,t} = \lim{}^s\Big\{\lim{}^t \operatorname{Ran}_{QX^i} G\lambda_i\Big\} \Rightarrow \lim{}^{s+t}\{\prod G\lambda_i\}.$$

По предложению 2.3 при фиксированном $i\in I$ существует изоморфизм $\lim^t \operatorname{Ran}_{QX^i} G\lambda_i \cong \lim^t_{\pi/X^i} G\lambda_i$, откуда

$$E_2^{s,t} \cong \lim{}^s\{\lim{}^t G\lambda_i\} \Rightarrow \lim{}^{s+t}\{\prod G\lambda_i\}.$$

Поменяв местами I^{op} и P и вновь применяя предложение 2.2, получаем спектральную последовательность со вторым членом $M_2^{s,t} = \lim^s_P \lim^t\{\operatorname{Ran}_{QX^i} G\lambda_i\}$, сходящуюся к тому же пределу. Ее база $M_2^{n,0} \cong \lim^n \lim\{\operatorname{Ran}_{QX^i} G\lambda_i\}$.

Имеем $\lim\{\mathrm{Ran}_{QX^i} G\lambda_i \cong \mathrm{Ran}_t G$, где t: $\mathrm{colim}\{\pi/X^i\} \to P$ ассоциирован с конусом QX^i: $\pi/X^i \to P$. В силу перестановочности $P/-$: $P^{op}\,\mathrm{Ens} \to \mathrm{cat}$ с копределами (см. доказательство следствия 2.4) выполняется соотношение $\mathrm{colim}\{P/X^i\} \cong P/\mathrm{colim}\{NX^i\}$, где $NX(p) = T(\pi(p), X)$ — функтор $T \to P^{op}\,\mathrm{Ens}$. Согласно предложению 2.3 $M_2^{n,0} \cong \lim^n G$.

По критерию lim-ацикличности $\lim^t\{\mathrm{Ran}_{QX^i} G\lambda_i\}$ вырождается при $t > 0$, если и только если $\mathrm{colim}_t\{LT(\pi(p), X^i)\} \in \mathcal{PA}$ для всех $t > 0$, $p \in P$. Таким образом, остается доказать сформулированные ниже предложения 2.2, 2.3.

Предложение 2.2. *Для любого функтора F: $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}$ с точными произведениями, где $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ — малые категории, существует спектральная последовательность*

$$\lim_c^s\{\lim_d^t\{F(c, d)\}\} \Rightarrow \lim^{s+t} F,$$

где c и d пробегают $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим проекцию pr: $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Дуализируя утверждение Андре [5], получаем $\lim^s \mathrm{Ran}_{pr}^t F \Rightarrow \lim^{s+t} F$, где Ran — правое расширение Кана [3]. Так как $\mathrm{Ran}_{pr}^t F(c)$ есть $\lim^t$ от композиции $(c/\mathcal{C}) \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ и категория $(c/\mathcal{C}) \times \mathcal{D}$ содержит конфинальную подкатегорию $\{c\} \times \mathcal{D}$, то согласно [6] $\mathrm{Ran}^t F(c)$ изоморфен $\lim_d^t\{F(c, d)\}$ при фиксированном c.

Утверждение предложения 2.2 было доказано в [7, 8] для случая, когда $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — частично упорядоченные множества.

Предложение 2.3. *Пусть π: $P \to T$ — функтор из малой категории P в категорию T, X — объект из T, QX: $\pi/X \to P$ сопоставляет стрелке $\pi(p) \to X$ объект $p \in P$. Тогда для любой проективной системы G: $\pi/X \to \mathcal{A}$ в абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными произведениями выполнено $\lim^n G \cong \lim^n \mathrm{Ran}_{QX} G$ $(n \geqslant 0)$ и $\mathrm{Ran}_{QX} G(p)$ равно произведению объектов $G(g)$ по всем $g \in T(\pi(p), X)$.*

Доказательство. Любая компонента связности слоя p/QX имеет инициальный объект. Поэтому, используя спектральную последовательность Андре, получим нужные изоморфизмы.

Следствие 2.4. *Пусть $\{X^i\}$ — диаграмма функторов $X^i \in P^{op}\,\mathrm{Ens}$ над малой категорией I такая, что для любого $p \in P$ и $t > 0$ $\mathrm{colim}_t\{LX^i(p)\} \in \mathcal{PA}$. Тогда для всякого функтора F: $P/\mathrm{colim}\{X^i\} \to \mathcal{A}$ существует спектральная последовательность $\lim^s\{\lim^t F_i\} \Rightarrow \lim^{s+t} F$, где F_i — ограничение F на P/X^i.*

Доказательство. Достаточно доказать, что канонический морфизм из $\mathrm{colim}\{P/X^i\}$ в $P/\mathrm{colim}\{X^i\}$ является изоморфизмом.

Пусть N: $\mathrm{cat} \to \Delta^{op}\,\mathrm{Ens}$ — функтор нерва. Тогда [9, с. 292] $\mathrm{colim}\{N(\mathcal{C}/c)\} \cong N\mathcal{C}$. Применяя к этому изоморфизму функтор, левый сопряженный к N, получим изоморфизм $\mathrm{colim}\{\mathcal{C}/c\} \cong \mathcal{C}$. Поэтому $P/X \cong \mathrm{colim}_\alpha\{(P/X)/\alpha\}$, где α пробегает P/X. Но для всех $\alpha \in P/X$ имеем $(P/X)/\alpha \cong P/QX(\alpha)$, отсюда $P/X \cong \mathrm{colim}^{P/X}\{P/p\}$.

Таким образом, функтор $P/-$: $P^{op}\,\mathrm{Ens} \to \mathrm{cat}$ — расширение Кана функтора $P \to \mathrm{cat}$, сопоставляющего объекту $p \in P$ категорию P/p, и, следовательно, он перестановочен с прямыми пределами, что и требовалось доказать.

Следствие 2.5. *Пусть I — частично упорядоченное множество и $\{X^i\}$ — локально направленное покрытие функтора $X \in P^{op}\,\mathrm{Ens}$, т. е. выполнены условия:*

1) *если $i < j$, то $X^i \subset X^j$,*
2) *$X(p) = \cup X^i(p)$, при любом $p \in P$,*
3) *если $x \in X^i(p) \cap X^j(p)$, то существует k такое, что $k < i$, j, $x \in X^k(p)$.*

Тогда для любого функтора F из P/X в абелеву категорию $\mathcal{A}$ существу-

ет спектральная последовательность $\lim^s\{\lim^t F_i\} \Rightarrow \lim^{s+t} F$, *где* F_i — *ограничения* F *на* P/X^i.

Доказательство. Зафиксируем $p \in P$. Индуктивная система $\{LX^i(p)\}$ распадается в прямую сумму $\sum Z_x$ по всем $x \in X(p)$, где $Z_x = Z$ при $x \in X^i(p)$ и $Z_x = 0$ при $x \notin X^i(p)$. Тогда Z_x — левое расширение Кана функтора Z: $I_x \to \mathrm{Ab}$, где $I_x = \{i \in I \mid x \in X^i(p)\}$, на множество I. Слои I_x/i либо пусты, либо обладают наибольшими элементами. Значит, $\mathrm{colim}_q Z_x \cong H_q(I_x)$. Так как I_x направлена снизу, то $H_q(I_x) = 0$ при $q > 0$ и $\mathrm{colim}_q\{LX^i(p)\} \cong \sum H_q(I_x) = 0$ $(q > 0)$. Применив следствие 2.4, приходим к необходимому утверждению, так как $\cup X^i \cong \mathrm{colim}\{X^i\}$.

3. Когомологии прямых пределов малых категорий

Обозначим через $N\mathscr{C}$ нерв категории $\mathscr{C}$. С любой диаграммой $\{\mathscr{C}_i\}$ в cat и конусом над ней $\{\varphi_i: \mathscr{C}_i \to \mathscr{C}\}$ мы свяжем отображение симплициальных множеств φ: $\mathrm{colim}\{N\mathscr{C}_i\} \to N\mathscr{C}$, ассоциированное отображениями нервов $N\varphi_i$: $N\mathscr{C}_i \to N\mathscr{C}$.

Функторы ∂_i: $\Delta/\mathscr{C}_i \to \mathscr{C}_i$, $\partial_i(c_0 \to \ldots \to c_n) = c_n$ имеют стягиваемые слои, и поэтому [6] $\lim^n(F_i\partial_i) \cong \lim^n F_i$, $n \geqslant 0$, для всякого функтора F_i: $\mathscr{C}_i \to \mathscr{A}$.

Если σ: $\Delta[n] \to \mathscr{C}$ — сингулярный симплекс нерва $\mathscr{C}$, то слой над σ функтора Δ/φ: $\Delta/\mathrm{colim}\{N\mathscr{C}_i\} \to \Delta/N\mathscr{C}$ равен $\Delta/\varphi^*(\sigma)$, где $\varphi^*(\sigma)$ — расслоенное произведение σ на φ.

Отображение $N(\Delta/X) \to X$ — гомологическая эквивалентность в том смысле, что $H_n(\Delta/X) \cong H_n(\Delta/X)^{\mathrm{op}} \cong H_n(X)$ $(n \geqslant 0)$. Поэтому $H_n(\Delta/\varphi^*(\sigma)) \cong H_n(\varphi^*(\sigma))$ при $\sigma \in \Delta/\mathscr{C}$.

Теорема 3.1. *Пусть диаграмма* $\{\mathscr{C}_i\}$, *конус* $\{\varphi_i: \mathscr{C}_i \to \mathscr{C}\}$ *и абелева категория* $\mathscr{A}$ *с точными произведениями обладают свойствами*:

1) $\mathrm{colim}_q\{LN\mathscr{C}_i\} \in \mathscr{P}\mathscr{A}$ $(q > 0)$,

2) $H_q(\varphi^*(\sigma)) = 0$ $(q > 0)$, $H_0(\varphi^*(\sigma)) = Z$ *для всякого* $\sigma \in \Delta/\mathscr{C}$.

Тогда для любого функтора F: $\mathscr{C} \to \mathscr{A}$ *имеет место спектральная последовательность первой четверти*

$$\lim^p\{\lim^q(F\varphi_i)\} \Rightarrow \lim^{p+q} F.$$

Доказательство. Применив теорему 2.1 к функторам $\pi[n] = [n]$, $G = F\partial t$, где t: $\mathrm{colim}\{\Delta/\mathscr{C}_i\} \to \Delta/\mathscr{C}$ индуцирован конусом Δ/φ_i: $\Delta/\mathscr{C}_i \to \Delta/\mathscr{C}$ категорий, получим $E^{p,q} = \lim^p\{\lim^q F\partial t\lambda_i\} \Rightarrow \lim^{p+q} F\partial t$, где $\{\lambda_i: \Delta/\mathscr{C}_i \to \mathrm{colim}\{\Delta/\mathscr{C}_i\}\}$ — конус копредела $\Delta/\mathscr{C}_i$. Функтор t удовлетворяет соотношениям $t\lambda_i = \Delta/\varphi_i$, так что $\partial t\lambda_i = \partial(\Delta/\varphi_i) = \varphi_i\partial_i$. Отсюда

$$E_2^{p,q} = \lim^p\{\lim^q F\varphi_i\partial_i\} \cong \lim^p\{\lim^q F\varphi_i\}.$$

Функтор t есть композиция

$$\mathrm{colim}\{\Delta/\mathscr{C}_i\} \cong \Delta/\mathrm{colim}\{N\mathscr{C}_i\} \to \Delta/N\mathscr{C}.$$

По условию $\varphi^*(\sigma)$ имеют гомологии точки, поэтому $\lim^n F\partial t \cong \lim^n F\partial \cong \lim^n F$. В результате

$$\lim^p\{\lim^q F\varphi_i\} \Rightarrow \lim^{p+q} F.$$

Следствие 3.2. *Спектральная последовательность* $\lim^p\{\lim^q F\varphi_i\}$ *сходится к* $\lim^n F$ *в каждом из следующих случаев*:

1) *нерв категории* $\mathscr{C}$ *локально направленно покрыт подкатегориями* $\mathscr{C}_i$, *т. е. выполнены условия*:

а) *если* $i < j \in I$, *то* $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{C}_j$,

б) $N\mathscr{C} = \cup N\mathscr{C}_i$,

в) *для любой последовательности стрелок* $c_0 \to \ldots \to c_n$ *из* $\mathscr{C}_i \cap \mathscr{C}_j$ *существует* $k \in I$ *такое, что все стрелки из* $c_0 \to \ldots \to c_n$ *принадлежат* $\mathscr{C}_k$, $k \leqslant i, j$;

2) *категория $\mathscr{C}$ — направленный копредел категорий $\mathscr{C}_i$.*

Доказательство. В первом случае выполнены условия теоремы 3.1, так как $\cup N\mathscr{C}_i \cong \operatorname{colim}\{N\mathscr{C}_i\}$. Второй случай следует из соотношения $\operatorname{colim}\{N\mathscr{C}_i\} \cong N \operatorname{colim}\{\mathscr{C}_i\}$ [10, с. 92].

Заключение. Спектральная последовательность теоремы 2.1 широко известна для случая, когда группа P действует свободно на симплициальном множестве. Следствие 3.2 показывает, что как результат работы [11], так и известные оценки когомологической размерности направленного копредела групп укладываются в эту спектральную последовательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mitchell B.* Theory of Categories.— New York: Acad. Press, 1965.
2. *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
3. *Mac Lane S.* Categories for the working mathematician.— Berlin: Springer, 1971.
4. *Кузьминов В. И.* Гомологическая теория размерности. Производные функтора проективного предела в гомологической теории топологических пространств: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.04.— Новосибирск, 1975.
5. *Andrè M.* Limites et fibres // C. r. Acad. sci. Paris.— 1965.— T. 260.— P. 756—759.
6. *Oberst U.* Homology of Categories and exactness of direct limits // Math. Z.— 1968.— Bd 107.— S. 89—115.
7. *Roos J.-E.* Sur les foncteurs derives de $\varprojlim$. Applications // C. r. Acad. sci. Paris.— 1961.— T. 252.— P. 3702—3704.
8. *Laudal O. A.* Cohomologie locale. Applications // Math. Scand.— 1963.— V. 12, N 2.— P. 147—162.
9. *Bousfield A. K., Kan D. M.* Homotopy limits, completions and localizations.— Berlin etc.: Springer, 1972.— (Lecture notes in math.; 304).
10. *Quillen D. G.* Higher algebraic K-theory // Algebraic k-theory. I, Evanston, 1972.— Berlin etc.: Springer, 1973.— P. 85—147.—(Lecture notes in math.; 341).
11. *Laudal O. A.* Sur la limite projective et la theorie de la dimension // Cah. top. et geom. diff.— 1961.— V. 3.— P. 23.

г. Новосибирск

Статья поступила 6 января 1987 г.