КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ НАПРАВЛЕННЫХ МНОЖЕСТВ [1]

Хусаинов А. А.

[1] Конспекты лекций для аспирантов. 2009. http://husainov51.narod.ru

Пусть заданы две проективные системы $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ абелевых групп и семейство гомоморфизмов $f_i : A_i \to B_i$, согласованных между собой с помощью коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "A(i\geqslant j)"'] & B_i \arrow[d, "B(i\geqslant j)"] \\ A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j \end{tikzcd}$$

При переходе к пределам проективных систем появляется гомоморфизм $\varprojlim f$, сопоставляющий каждой нити $\{a_i\}_{i\in J}$ нить $\{f_i(a_i)\}_{i\in J}$. Из сюръективности гомоморфизмов f_i не следует сюръективность гомоморфизма $\varprojlim f$ между пределами этих проективных систем. Возникают различные вопросы связанные с измерением этого отклонения от сюръективности. Этими вопросами занимается теория производных функтора предела. Цель данной работы - ввести читателя в раздел гомологической алгебры, в котором изучается эта теория.

В работе доказывается теорема Митчела о том, что когомологическая размерность направленного множества конфинальности $\aleph_n$ равна $n+1$.

Оглавление

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Обозначения

- $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел,
- $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел,
- Ab – категория абелевых групп и гомоморфизмов,
- Ens – категория множеств,
- $L : Ens \to Ab$ – функтор, сопоставляющий каждому множеству E свободную абелеву группу с базисом E и каждому отображению f – гомоморфизм, продолжающий f.

1.2 Частично упорядоченные множества

Лемма 1.2.1 *(Цорн) Если каждая цепь в частично упорядоченном множестве ограничена сверху элементом частично упорядоченного множества, то в этом частично упорядоченном существует по крайней мере один максимальный элемент.*

Частично упорядоченное множество J рассматриваем как малую категорию, в которой для каждой пары элементов $a, b \in J$ множество морфизмов $J(a, b)$ состоит из единственного элемента если $a \leqslant b$, и $J(a, b) = \emptyset$ – в противном случае.

Частично упорядоченное множество J называется *направленным множеством*, если для любых $a, b \in J$ существует такой $c \in J$, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$.

Ординалом называется множество, вполне упорядоченное отношением $\in$. Кардиналом называется наименьший ординал данной мощности.

Лемма 1.2.2 *Пусть I – бесконечное направленное множество, $\aleph$ – кардинал равномощный I. Существует такое неубывающее семейство направленных подмножеств $I_\mu \subseteq I$, что $|I_\mu| < |I|$ и $\bigcup\limits_{\mu \in \aleph} I_\mu = I$. Причем для каждого предельного ординала $\nu < \aleph$ имеет место $I_\nu = \bigcup\limits_{\mu < \nu} I_\mu$*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f : I \times I \to I$, для которой $f(i,j) \geqslant i$, $f(i,j) \geqslant j$ и $f(i,i) = i$. Для произвольного подмножества $M \subseteq I$ положим $M^{(1)} = f(M \times M)$, $M^{(2)} = f(M^{(1)} \times M)$, $\cdots$, $M^{(n)} = f(M^{(n-1)} \times M)$, $\cdots$. Обозначим $\widetilde{M} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M^{(n)}$. Тогда $\widetilde{M} \supset M$ и $|\widetilde{M}| = |M|$. Пусть $\mu \mapsto i_\mu$ – биекция между $\aleph$ и I. Тогда $I = \{i_\mu : \mu < \aleph\}$. Рассмотрим подмножества $E_\mu = \{i_\alpha : \alpha < \mu\}$. Семейство $I_\mu = \widetilde{E_\mu}$ обладает необходимыми свойствами. $\square$

1.3 Сопряженные функторы и инъективные объекты

Определение 1.3.1 *Рассмотрим функторы $\mathscr{A} \underset{R}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$ между произвольными категориями. Функтор T называется* сопряженным слева *к R, если существует естественное преобразование $\eta_A : A \to RTA$ такое, что для каждого $\alpha : A \to RB$ существует единственный морфизм $\omega(\alpha) : TA \to B$, делающий коммутативной диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\forall\alpha"'] & & RTA \arrow[dl, dashed, "R(\omega(\alpha))"] \\
& RB &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& TA \arrow[dl, "\exists!\omega(\alpha)"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

Можно доказать, что отображение $\omega : \mathscr{A}(A, RB) \to \mathscr{B}(TA, B)$ будет осуществлять в этом случае естественную биекцию между бифункторами, в честь чего появился термин “сопряженный слева”.

Определение 1.3.2 *Пусть $\mathscr{A}$ – категория. Объект $I \in \mathscr{A}$ называется* инъективным, *если для любого мономорфизма $A \to B$ и морфизма $A \to I$ существует морфизм, делающий коммутативным треугольник*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, tail, "\forall"] \arrow[dr, "\forall"'] & & B \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Предложение 1.3.1 *Пусть $R : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ – функтор, сопряженный справа к некоторому функтору T, переводящему мономорфизмы в мономорфизмы. Тогда R переводит инъективные объекты в инъективные.*

Доказательство. Отображение ω, участвующее в определении сопряженного функтора, является биекцией. Стало быть, мы можем определить обратное отображение, полагая $\omega^{-1}(\beta) = \alpha$ если $\omega(\alpha) = \beta$. Так как $\omega(\alpha)$ – тот единственный морфизм, для которого $R(\omega(\alpha))\eta_A = \alpha$, то $\omega^{-1}(\beta) = R(\beta)\eta_A$.

Пусть I – инъективный объект в $\mathscr{B}$. Нам нужно доказать, что для любых мономорфизма $\mu : A' \rightarrowtail A$ и морфизма $\alpha : A' \to RI$ существует морфизм, делающий коммутативным треугольник

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & A \arrow[dl, dashed, "?"] \\ & RI & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Поскольку I – инъективный объект в категории $\mathscr{B}$, то существует морфизм β, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} TA' \arrow[rr, tail, "T(\mu)"] \arrow[dr, "\omega(\alpha)"'] & & TA \arrow[dl, dashed, "\exists\beta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Применим к этому треугольнику функтор R и дополним его сверху квадратом, коммутативном в силу естественности морфизмов η_A:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[d, "\eta_{A'}"'] & & A \arrow[d, "\eta_A"] \\
RTA' \arrow[rr, tail, "R(T(\mu))"] \arrow[dr, "R(\omega(\alpha))"'] & & RTA \arrow[dl, "R(\beta)"] \\
& RI &
\end{tikzcd}$$

Внешний пятиугольник коммутативен. Отсюда $R(\omega(\alpha))\eta_{A'} = R(\beta)\eta_A\mu$. Согласно определению отображения ω, морфизм $\omega(\alpha)$ будет единственным морфизмом, для которого $\alpha = R(\omega(\alpha))\eta_{A'}$. Отсюда $\alpha = R(\beta)\eta_A\mu$. Но $R(\beta)\eta_A = \omega^{-1}(\beta)$, и значит $\alpha = \omega^{-1}(\beta)\mu$. Следовательно искомый морфизм, делающий коммутативной диаграмму (1.1), можно взять равным $\omega^{-1}(\beta)$. $\square$

1.4 Абелевы категории

Рассмотрим аксиомы Гротендика [4].

Определение 1.4.1 *Категория называется* абелевой*, если она аддитивна и удовлетворяет следующим аксиомам:*

(AB1) Для каждого ее морфизма существует ядро и коядро;

(AB2) Для каждого ее морфизма f связанный с ним условием коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\mathrm{coker}\, f"] & \mathrm{Coker}\, f \\
& \mathrm{Coker}\,(\ker f) \arrow[r, "\exists! \bar{f}"] & \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

морфизм $\bar{f}$ является изоморфизмом.

Абелева категория $\mathscr{A}$ может удовлетворять дополнительным аксиомам

(AB3) Для каждого семейства ее объектов $\{A_e\}_{e\in E}$ существует копроизведение $\bigoplus\limits_{e\in E} A_e$.

(AB4) Выполнено (AB3) и функтор, ставящий в соответствие семействам объектов их копроизведения, точен;

(AB5) Для любых направленного множества J и функтора $A : J \to \mathscr{A}$ существует копредел $\varinjlim^J A \in \mathscr{A}$, и функтор $\varinjlim^J : \mathscr{A}^J \to \mathscr{A}$ точен.

Легко видеть, что из (AB5) следует (AB4).

1.5 Правые производные функторы

Определим производные функторы от точного слева функтора между абелевыми категориями, определенного на абелевой категории с достаточным числом инъективных объектов. Докажем, что они являются его правыми сателлитами. Это нам нужно для определения производных функторов предела.

Определение 1.5.1 *Абелева категория $\mathscr{A}$ называется имеющей достаточное число инъективных объектов, если для каждого ее объекта A существует мономорфизм $A \rightarrowtail A^0$ в инъективный объект.*

Пусть $\mathscr{A}$ – абелева категория с достаточным числом инъективных объектов.

Определение 1.5.2 *Инъективной резольвентой объекта $A \in \mathscr{A}$ называется произвольная точная последовательность*

$$0 \to A \to A^0 \to A^1 \to A^2 \to \cdots ,$$

в которой A^0, A^1, $\cdots$ – инъективны.

Определение 1.5.3 *Функтор $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ между абелевыми категориями называется точным слева, если он каждую точную в $\mathscr{A}$ последовательность*

$$0 \to A' \to A \to A''$$

переводит в точную последовательность

$$0 \to T(A') \to T(A) \to T(A'')$$

Для произвольного точного слева функтора $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ из категории с достаточным числом инъективных объектов рассмотрим n-е объекты когомологий $H^n(T(A^*))$ комплекса

$$0 \to T(A^0) \to T(A^1) \to T(A^2) \to \cdots$$

Для любого морфизма $f : A \to B$ категории $\mathscr{A}$ и произвольных инъективных резольвент A^*, B^* существует единственное с точностью до гомотопии отображение комплексов

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A^0 \arrow[r] \arrow[d] & A^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & B^0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Применение функтора T приводит к отображению комплексов $T(A^*) \to T(B^*)$, определяющему для каждого $n \geqslant 0$ единственный независимый от резольвент и от отображения резольвент морфизм объектов когомологий $H^n(T(A^*)) \to H^n(T(B^*))$.

Определение 1.5.4 *Пусть $\mathscr{A}$ – абелева категория с достаточным числом инъективных объектов, $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ – аддитивный точный слева функтор между абелевыми категориями. Функторы $R^nT : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, определенные по формуле $R^nT(A) = H^n(A^*)$ называются* правыми производными *функтора T.*

Мы хотим показать, что последовательность функторов R^nT состоит из правых сателлитов функтора T.

Лемма 1.5.1 *[1] Для любой диаграммы, состоящей из точной строки и мономорфизмов $\alpha : A \to A^0$, $\gamma : C \to C^0$ в инъективные объекты A^0 и C^0*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
 & A^0 & & C^0 &
\end{tikzcd}$$

существует дополнение до коммутативной диаграммы, состоящей из *трех точных строк и трех точных столбцов*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A^0 \arrow[r, "i_A"] \arrow[d] & B^0 \arrow[r, "p_C"] \arrow[d] & C^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Полагаем $B^0 = A^0 \oplus C^0$. Пусть $i_A : A^0 \to A^0 \oplus C^0$ и $i_C : C^0 \to A^0 \oplus C^0$ – канонические инъекции, а p_A и p_C – проекции. В силу инъективности объекта A^0 существует единственный $\mu : B \to A^0$. Тогда морфизм β определяется по формуле $\beta = i_A \cdot \mu + i_C \cdot \gamma \cdot g$.

Докажем, что β – мономорфизм. Пусть (K, κ) – ядро морфизма β. Тогда $p_C\beta\kappa = 0 \Rightarrow p_C(i_A\mu + i_C\gamma g)\kappa = 0 \Rightarrow \gamma g\kappa = 0 \Rightarrow g\kappa = 0 \Rightarrow \exists!\nu\ (f\nu = 0) \Rightarrow i_A\alpha\nu = \beta f\nu = \beta\kappa = 0 \Rightarrow \nu = 0 \Rightarrow \kappa = 0$. □

Предложение 1.5.2 *Если $\mathscr{A}$ имеет достаточное число инъективных объектов, и $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ точен слева, то функторы $R^nT : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ при $n \geqslant 1$ являются правыми сателлитами функторами $R^0T = T$.*

Доказательство. С помощью леммы 1.5.1 короткая точная последовательность может быть вложена точную последовательность инъективных резольвент $0 \to A^n \to B^n \to C^n \to 0$, расщепляющуюся на каждом n. Применение функтора T приводит к точной последовательности комплексов. Соответствующая длинная точная последовательность дает ∂-функтор. Поскольку инъективный объект имеет резольвенту состоящую из единственного ненулевого объекта, то полученный ∂-функтор будет стирающим. Согласно Гротендику [4], он будет универсальным. □

1.6 Ациклические объекты

Объект $A \in \mathscr{A}$ называется T-ациклическим, если значения $R^nT(A)$ правых производных функторов на нем равны 0, для всех $n > 0$. Следующая лемма является частным случаем утверждения [4, Лемма 3.3.1].

Лемма 1.6.1 *Пусть $\mathscr{A}$ – абелева категория с достаточным числом инъективных объектов, $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ – аддитивный и точный слева функтор в абелеву категорию. Если класс объектов $\mathscr{S}$ из $\mathscr{A}$, удовлетворяет следующим трем условиям*

1. *для каждого $A \in \mathscr{S}$ существует мономорфизм $A \rightarrowtail S$ в некоторый объект $S \in \mathscr{S}$;*

2. *если объект A изоморфен прямому слагаемому некоторого объекта из $\mathscr{S}$, то $A \in \mathscr{S}$;*

3. *для всякой точной последовательности $0 \to S' \to S \to S'' \to 0$ принадлежность объектов $S' \in \mathscr{S}$ и $S \in \mathscr{S}$ влечет принадлежность $S'' \in \mathscr{S}$ и точность последовательности $0 \to T(S') \to T(S) \to T(S'') \to 0$*

то во-первых, каждый инъективный объект из $\mathscr{A}$ принадлежит $\mathscr{S}$, и во-вторых каждый объект из $\mathscr{S}$ является T-ациклическим.

Доказателство см. [4, Лемма 3.1.1]. □

В этом случае значения $R^nT(A)$ можно вычислять с помощью произвольной T-ациклической резольвенты объекта A:

Предложение 1.6.2 *В условиях леммы 1.6.1 объекты $R^nT(A)$ изоморфны объектам когомологий комплекса*

$$0 \to T(A^0) \to T(A^1) \to T(A^2) \to \cdots$$

полученного применением функтора T к резольвенте объекта A, состоящей из $A^n \in \mathscr{S}$.

Доказательство. Разложим резольвенту в композицию точных последовательностей

$$0 \to K^{n-2} \to A^{n-1} \to K^{n-1} \to 0, \quad n \geqslant 1,$$

где $K^{-1} = A$.

$$\begin{tikzcd}
& A^0 \arrow[rr, "\partial^0"] \arrow[dr] & & A^1 \arrow[r] \arrow[drr] & \cdots \arrow[rr] & & A^{n-1} \arrow[rr, "\partial^{n-1}"] \arrow[dr] & & A^n \\
A \arrow[ur, tail] & & K^0 \arrow[ur, tail] & & & \cdots \arrow[ur, tail] & & K^{n-1} \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

Функтор T переводит мономорфизмы в мономорфизмы, откуда применение функтора T к этой диаграмме дает диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& TA^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, two heads] & & TA^1 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & TA^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[dr, two heads] & & TA^n \\
TA \arrow[ur, tail] & & TK^0 \arrow[ur, tail] & & \cdots \arrow[ur, tail] & & TK^{n-1} \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

Объекты TA^n определены для всех целых n, но при $n < 0$ они равны нулю. Поскольку T точен слева, то $TK^{n-1} = \operatorname{Ker} d^n$. Согласно определению объекта когомологий $H^n(TA^*)$ имеет место точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Im} d^{n-1} \to TK^{n-1} \to H^n(TA^*) \to 0$$

Отсюда легко получить точную последовательность

$$TA^{n-1} \to TK^{n-1} \to H^n(TA^*) \to 0.$$

С другой стороны, поскольку производные составляют точный ∂-функтор и $R^1TA^{n-1} = 0$, то точна последовательность

$$0 \to TK^{n-2} \to TA^{n-1} \to TK^{n-1} \to R^1TK^{n-2} \to 0$$

и $R^kTK^{n-1} \cong R^{k+1}TK^{n-2}$ при $k \geqslant 1$. Отсюда получаем

$$H^n(TA^*) \cong R^1TK^{n-2} \cong R^2TK^{n-3} \cong \cdots \cong R^nTK^{-1} = R^nTA\ .$$

$\square$

Глава 2

Категория проективных систем абелевых групп

Проективной системой абелевых групп называется функтор $J^{op} \to \mathrm{Ab}$. Пусть $\mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ – категория проективных систем, морфизмами между которыми являются естественные преобразования, при фиксированном частично упорядоченным множестве J.

2.1 Инъективные объекты в категории проективных систем

Предложение 2.1.1 *Для всякого частично упорядоченного множества J категория проективных систем $\mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ абелева и удовлетворяет аксиомам (AB1-AB5).*

Забывающий функтор $O : \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}} \to \mathrm{Ab}^{|\mathrm{J}|}$ обладает правым сопряженным $R : \mathrm{Ab}^{|\mathrm{J}|} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$.

Напомним, что в категории абелевых групп инъективными объектами являются в точности делимые абелевы группы. Каждая абелева группа допускает вложение в делимую.

Предложение 2.1.2 *Категория $\mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ имеет достаточное число инъективных объектов.*

Доказательство. Пусть A – проективная система. Для каждого $j \in J$ существуют вложения $A(j) \to I_j$ в инъективные объекты категории абелевых групп. Это определяет мономорфизм семейств абелевых групп

$O(A) \to I$. Применим функтор R к этому мономорфизму. Как сопряженный справа к точному функтору функтор R переводит инъективные объекты в инъективные. Композиция мономорфизмов $A \rightarrowtail RO(A) \rightarrowtail R(I)$ будет искомым мономорфизмом. $\square$

2.2 Правые сателлиты функтора предела

Из предложения 2.1.2 вытекает, что каждый объект категории $\mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ допускает инъективную резольвенту.

Лемма 2.2.1 *Функтор* $\varprojlim_{J^{op}} : \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}} \to \mathrm{Ab}$ *точен слева.*

Доказательство. Функтор предела сопряжен справа к диагональному функтору. Отсюда следует, что он перестановочен с пределами и, в частности, он ядра переводит в ядра. $\square$

Стало быть, определены правые производные $R^n \varprojlim_{J^{op}}$ функтора предела. Обозначим их через

$$\varprojlim{}^n_{J^{op}} : \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}} \to \mathrm{Ab}\ .$$

2.3 Вялые проективные системы

Пусть J – частично упорядоченное множество. Предел $\varprojlim_{J^{op}} A \subseteq \prod\limits_{j\in J} A(j)$ проективной системы $A : J^{op} \to \mathrm{Ab}$ состоит из таких семейств $\{x_j\}_{j\in J}$, что $A(j \geqslant i)(x_j) = x_i$. Эти семейства называются *нитями в A над J*.

Функтор $\varprojlim_{J^{op}} : \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}} \to \mathrm{Ab}$ аддитивен и точен слева, как сопряженный слева к диагонали $\Delta_{J^{op}} : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$.

Подмножество $U \subseteq J$ называется *открытым*, если для каждого $i \in U$ оно содержит все $j \in J$, для которых $i \geqslant j$.

Предложение 2.3.1 *Для произвольного частично упорядоченного множества J множество открытых подмножеств составляют топологию на J.*

Пусть $A : J^{op} \to \mathrm{Ab}$ – проективная система абелевых групп. Для любого открытого $U \subset J$ определен гомоморфизм *ограничения* ρ^A_{JU} : $\varprojlim_{J^{op}} A \to \varprojlim A|_U$, который сопоставляет каждой нити $a = \{a_i\}_{i\in J}$ нить

$a|_U = \{a_i\}_{i \in U}$ над U. Если для каждого открытого $U \subseteq J$ гомоморфизм $\rho^A_{J\,U} : \varprojlim_{J^{op}} A \to \varprojlim A|_U$ сюръективен, то проективная система $A : J^{op} \to \mathrm{Ab}$ называется *вялой.*

Пусть $\Pi = R \circ O$ – композиция функторов $O : \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}} \to \mathrm{Ab}^{|\mathrm{J}|}$ и $R : \mathrm{Ab}^{|\mathrm{J}|} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$.

Лемма 2.3.2 *Для любой* $A \in \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ *проективная система* ΠA *вялая.*

Доказательство. $\Pi A(i) = \prod\limits_{i \geqslant i_0} A(i_0)$, и $\varprojlim \Pi A|_U = \prod\limits_{i_0 \in U} A(i_0)$. □

Предложение 2.3.3 *Для любой* $A \in \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ *существует вложение в вялую проективную систему.*

Доказательство. Пусть $\Pi A(i) = \prod\limits_{i \geqslant i_0} A(i_0)$. Вложения $A(i) \subseteq \prod\limits_{i \geqslant i_0} A(i_0)$ определяют мономорфизм $A \rightarrowtail \Pi A$. □

Лемма 2.3.4 *Пусть* $f : A \to B$ *– ретракция проективных систем. Если* A *– вялая, то* B *– вялая.*

Доказательство. Легко видеть, что для произвольного естественного преобразования $A \to B$ между проективными преобразованиями и открытого подмножества $U \subseteq J$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{J^{op}} A \arrow[r] \arrow[d, "\rho^A_{J\,U}"'] & \varprojlim_{J^{op}} B \arrow[d, "\rho^B_{J\,U}"] \\
\varprojlim A|_U \arrow[r] & \varprojlim B|_U
\end{tikzcd}$$

Если в этой диаграмме морфизм $\rho^A_{J\,U}$ и нижний горизонтальный морфизм – эпиморфизмы, то и морфизм $\rho^B_{J\,U}$ будет эпиморфизмом. Поскольку $A|_U \to B|_U$ – ретракция, то применение аддитивного функтора $\varprojlim$ приводит к ретракции $\varprojlim A|_U \to \varprojlim B|_U$. Стало быть, эти условия выполнены. □

Следствие 2.3.5 *Если* F *– инъективный объект категории* $\mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$*, то* F *– вялая проективная система.*

Доказательство. По предложению 2.3.3 существует вложение F в вялую проективную систему ΠF. Поскольку F – инъективный объект, то существует левый обратный морфизм $\pi : \Pi F \to F$ к этому вложению. Следовательно, по лемме 2.3.4, F является вялой. $\square$

Лемма 2.3.6 *Если $A \in \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ – вялая, то для всякого открытого $U \subseteq J$ ограничение $A|_U \in \mathrm{Ab}^{\mathrm{U^{op}}}$ является вялой проективной системой.*

Следующее утверждение можно получить как следствие одного из свойств вялых пучков [3, Теорема 3.1.2]. Соответствующий морфизму проективных систем $A \xrightarrow{f} B$ гомоморфизм $\varprojlim_{J^{op}} A \xrightarrow{\varprojlim_{J^{op}} f} \varprojlim_{J^{op}} B$ действует как сопоставляющий каждой нити $\{a_i\}_{i\in J}$ нить $\{f_i(a_i)\}_{i\in J}$.

Теорема 2.3.7 *Если в точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ в категории $\mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}}$ проективная система A вялая, то для каждого открытого $U \subseteq J$ точна последоательность*

$$0 \to \varprojlim A|_U \xrightarrow{\varprojlim f|_U} \varprojlim B|_U \xrightarrow{\varprojlim g|_U} \varprojlim C|_U \to 0$$

Доказательство. Можно считать без ограничения общности, что $U = J$. Пусть $s \in \varprojlim_{J^{op}} C$ – нить. Докажем, что она является образом некоторой нити $t \in \varprojlim_{J^{op}} B$. С этой целью рассмотрим множество пар (x, U), состоящих из таких открытых $U \subseteq J$ и $x \in \varprojlim B|_U$, что $\varprojlim g|_U(x) = s|_U \in \varprojlim C|_U$. Упорядочим множество пар отношением $(x, U) \leqslant (y, V)$ если $U \subseteq V$ и $y|_U = x$. В полученном частично упорядоченном множестве каждая цепь ограничена сверху, стало быть по лемме Цорна существует некоторый максимальный элемент, обозначим его через (U, t). Если $J \setminus U \neq \emptyset$, то возьмем любой $i \in J \setminus U$. В силу сюръективности $g_i : B(i) \to C(i)$ мы можем построить пару (t', Λ_i), где $\Lambda_i = \{j \in J : i \geqslant j\}$ и $t'_j = B(i \geqslant j)(t'_i)$, переходящую в нить $s|_{\Lambda_i} \in \varprojlim C|_{\Lambda_i}$. Поскольку образы нитей t и t' совпадают на $U \cap \Lambda_i$, то ограничение их разности на $U \cap \Lambda_i$ принадлежит $\varprojlim A|_{U\cap\Lambda_i}$. Пользуясь вялостью проективной системы A мы можем построить такую нить r над Λ_i, что

$$r|_{U\cap\lambda_i} = t|_{U\cap\Lambda_i} - t'|_{U\cap\Lambda_i} \ .$$

Положим $t'' = t' + r \in \varprojlim B|_{\Lambda_i}$. Поскольку $t''|_{\Lambda_i \cap U} = t'|_{\Lambda_i \cap U} + r|_{\Lambda_i \cap U} = t|_{\Lambda_i \cap U}$, то семейство элементов

$$\tau_k = \begin{cases} t''_k & \text{, при} \quad k \in \Lambda_i, \\ t_k, & \text{, при} \quad k \in U \end{cases}$$

является нитью τ над $U \cup \Lambda_i$. Эта нить является продолжением нити t, стало быть $(\tau, U \cup \Lambda_i) \geqslant (t, U)$. Это противоречит максимальности пары (t, U). Следовательно, $U = J$. $\square$

Замечание 2.3.1 *Можно ослабить условие вялости проективной системы A. Достаточно было предположить, что для любого $i \in J$ и для всякого открытого $U \subseteq \Lambda_i$ гомоморфизмы ограничения $A(i) \to \varprojlim A|_U$ сюръективны.*

Следствие 2.3.8 *Если в точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ проективные системы A и B вялые, то C – вялая.*

Доказательство. Для любого открытого U имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \varprojlim_{J^{op}} A \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_{J^{op}} B \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_{J^{op}} C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \varprojlim A|_U \arrow[r] & \varprojlim B|_U \arrow[r] & \varprojlim C|_U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Поскольку $\varprojlim_{J^{op}} B \to \varprojlim B|_U$ и $\varprojlim B|_U \to \varprojlim C|_U$ эпиморфизмы, то $\varprojlim_{J^{op}} C \to \varprojlim C|_U$ – эпиморфизм. $\square$

Теорема 2.3.9 *Если $F : J^{op} \to \mathrm{Ab}$ – вялая проективная система, то $\varprojlim^n F = 0$ для всех $n > 0$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 1.6.1. Мы рассматриваем функтор между абелевыми категориями $\varprojlim : \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}} \to \mathrm{Ab}$ и класс вялых проективных систем. Первое условие леммы 1.6.1 выполнено по предложению 2.3.3. Второе – из леммы 2.3.4. Третье условие выполнено по теореме 2.3.7 и следствию 2.3.8. $\square$

Рассмотрим комплекс $C^*(J^{op}, A)$, состоящий из абелевых групп

$$C^n(J^{op}, A) = \prod_{j_0 \geqslant \dots \geqslant j_n} A(j_n), \quad n \geqslant 0,$$

и гомоморфизмов

$$\delta^n\varphi(j_0 \geqslant j_1 \geqslant \dots \geqslant j_{n+1}) = \\ \sum_{k=0}^{n} \varphi(j_0 \geqslant j_1 \geqslant \dots \geqslant \widehat{j_k} \geqslant \dots \geqslant j_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1}\varphi(j_0 \geqslant j_1 \geqslant \dots \geqslant j_n)$$

Положим $C^n(J^{op}, A) = 0$ для всех $n < 0$. Легко проверяется, что $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, для всех $n \in \mathbb{Z}$. Определим *n-й объект когомологий частично упорядоченного множества J* как $H^n(C^*(J^{op}, A))$.

Следствие 2.3.10 *Для любой проективной системы A над J группы $\varprojlim^n A$ изоморфны группам когомологий комплекса $(C^n(J^{op}, A), d^n)$.*

Доказательство. Применим функтор предела к резольвенте $\Pi^n A$, состоящей из проективных систем $\Pi^n A(i) = \prod_{i \geqslant j_0 \geqslant \dots \geqslant j_n} A(j_n)$. Получим комплекс $C^n(J^{op}, A)$. Доказываемое утверждение следует из предложения 1.6.2 о том, что производные функтора можно вычислять с помощью произвольной ациклической резольвенты. □

Глава 3

Когомологии направленных множеств

В этой части I будет обозначать направленное множество.

3.1 Конфинальные подмножества

Подмножество $X \subseteq I$ направленного множества называется конфинальным, если для каждого $j \in J$ существует такой $x \in X$, что $x \geqslant j$. Ясно, что в этом случае множество X, упорядоченное отношением порядка заданном на I, будет направленным.

Лемма 3.1.1 *Если $X \subset I$ – конфинальное подмножество, то для любой проективной системы $A : I^{op} \to$ гомоморфизмы $\varprojlim^n_{I^{op}} A \to \varprojlim^n A|_X$ являются изоморфизмами для всех $n \geqslant 0$.*

3.2 Слабо вялые проективные системы

Мы видели, что вялые проективные системы ациклические.

Определение 3.2.1 *Проективная система $F : I^{op} \to Ab$* слабо вялая*, если для любого направленного подмножества $J \subseteq I$ естественное отображение $\varprojlim_{I^{op}} F \to \varprojlim F|_J$ сюръективно.*

Цель этого пункта – доказать $\varprojlim$-ацикличность слабо вялых проективных систем.

Лемма 3.2.1 *$F : I^{op} \to Ab$ слабо вяла тогда и только тогда, когда $\rho_{I\,U}$: $\varprojlim_{I^{op}} F \to \varprojlim F|_U$ эпиморфизм для каждого открытого направленного подмножества $U \subseteq I$.*

Доказательство. Если F – слабо вяла, то $\rho_{I\,U}$ – сюръективны для открытых направленных U. Это очевидно. Докажем обратную импликацию. Пусть $J \subseteq I$ – направленное. Возьмем наименьшее открытое $U \supseteq J$. Тогда $U = \cup_{j \in J} \Lambda_j$. Отображение $\varprojlim F|_U \to \varprojlim F|_J$ – изоморфизм, ибо каждую нить над J можно единственным образом продолжить на U. □

Предложение 3.2.2 *Пусть $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ – точная последовательность в $\mathrm{Ab}^{\mathrm{I^{op}}}$. Если A – слабо вялая, то точна последовательность*

$$0 \to \varprojlim_{I^{op}} A \xrightarrow{\varprojlim_{I^{op}} f} \varprojlim_{I^{op}} B \xrightarrow{\varprojlim_{I^{op}} g} \varprojlim_{I^{op}} C \to 0$$

Доказательство. Для доказательства сюръективности гомоморфизма $\varprojlim g$ недостаточно леммы Цорна. Будем доказывать это с помощью индукции по $|I|$. Нам понадобится лемма 1.2.2, согласно которой существует такое семейство направленных множеств $I_\mu \subseteq I$, $\mu \in \aleph = |I|$, что $I_\mu \leqslant I_\nu$ при $\mu < \nu$, $|I_\mu| < |I|$ для всех $\mu \in \aleph$ и $\bigcup\limits_{\mu \in \aleph} I_\mu = I$.

Поскольку $|I_\mu| < \aleph$, то по предположению индукции $\varprojlim g|_{I_\mu}$ – сюръективны для всех $\mu \in \aleph$.

Рассмотрим произвольную нить $s \in \varprojlim_{I^{op}} C$. Для всякого $\mu \in \aleph$ ограничение $s|_{I_\mu}$ имеет прообраз в $\varprojlim B|_{I_\mu}$. Рассмотрим множество пар (t, I_μ), где $\mu \leqslant \aleph$, которые являются проорбазами $s|_{I_\mu}$. Упорядочим отношением $(t, I_\mu) \leqslant (t', I_{\mu'})$ если $I_{\mu'} \geqslant I_\mu$ и $t'|_{I_\mu} = t$. Получим частично упорядоченное множество, в котором каждая цепь ограничена сверху. Пусть (t, I_μ) – максимальный элемент.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim A|_{I_{\mu+1}} \arrow[r, "\varprojlim f|_{I_{\mu+1}}"] \arrow[d] & \varprojlim B|_{I_{\mu+1}} \arrow[r, "\varprojlim g|_{I_{\mu+1}}"] \arrow[d] & \varprojlim C|_{I_{\mu+1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim A|_{I_\mu} \arrow[r, "\varprojlim f|_{I_\mu}"] & \varprojlim B|_{I_\mu} \arrow[r, "\varprojlim g|_{I_\mu}"] & \varprojlim C|_{I_\mu} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим нить $t' \in \varprojlim B|_{I_{\mu+1}}$, для которой $\varprojlim f|_{I_{\mu+1}}(t') = s|_{I_{\mu+1}}$. Тогда $t - t'|_{I_\mu} \in \varprojlim A|_{I_\mu}$. Поскольку A – вялая, то можно взять такой элемент

$r \in \varprojlim A|_{I_{\mu+1}}$, что $r|_{I_\mu} = t - t'|_{I_\mu}$. Сумма $t' + \varprojlim f|_{I_{\mu+1}}(r)$ будет нитью, продолжающей нить t, ибо ее ограничение на I_μ будет равно $t'|_{I_\mu} + (t - t'|_{I_\mu})$. Это противоречит максимальности пары (t, I_μ). Следовательно $\mu = \aleph$, и максимальная пара равна (t, I). $\square$

Точно так же как следствие 2.3.8 доказывается

Следствие 3.2.3 *Если в точной последовательности* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *проективные системы* A *и* B *слабо вялые, то* C *– слабо вялая.*

Теорема 3.2.4 *Если* $A : I^{op} \to \mathrm{Ab}$ *– слабо вялая проективная система, то* $\varprojlim^n_{I^{op}} A = 0$, $\forall n \geqslant 1$.

Доказательство. Проверим условия леммы 1.6.1, для функтора между абелевыми категориями $\varprojlim : \mathrm{Ab}^{\mathrm{J^{op}}} \to \mathrm{Ab}$ и класса слабо вялых проективных систем. Поскольку вялая проективная система будет слабо вялой, то первое условие леммы 1.6.1 вытекает из предложения 2.3.3. Второе доказывается аналогичного лемме 2.3.4. Третье условие выполнено по предложению 3.2.2 и следствию 3.2.3. $\square$

Следствие 3.2.5 *Для произвольного направленного множества* I *производные функторы* $\varprojlim^n_{I^{op}}$ *можно вычислять с помощью слабо вялых резольвент.*

3.3 Верхняя оценка когомологической размерности направленных множеств мощности $\aleph_n$

Когомологической размерностью называется точная верхняя грань чисел n, для которых $\varprojlim^n_{I^{op}} \neq 0$. В частности, если $I = \emptyset$, то $\varprojlim_{I^{op}} A$ – терминальный объект в Ab. Отсюда $\mathrm{c.d.}\emptyset = -1$.

Теорема 3.3.1 (Гобло) *[8] Пусть* I *– направленное множество мощности* $|I| \leqslant \aleph_n$. *Тогда* $\mathrm{c.d.}I^{op} \leqslant n + 1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную слабо вялую резольвенту

$$0 \to A \to F^0 \to \cdots \to F^i \to F^{i+1} \to \cdots$$

Разложим ее в произведение коротких точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \to & F^0 & \to & X^1 & \to & 0 \\
0 & \to & X^1 & \to & F^1 & \to & X^2 & \to & 0 \\
 & & & & \cdots & & & & \\
0 & \to & X^{k-1} & \to & F^{k-1} & \to & X^k & \to & 0 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

и применим к ним ∂-функтор $\varprojlim^k_{I^{op}}$. Соответствующие длинные точные последовательности приводят к точной последовательности

$$0 \to \varprojlim_{I^{op}} X^{k-1} \to \varprojlim_{I^{op}} F^{k-1} \to \varprojlim_{I^{op}} X^k \to \varprojlim^1_{I^{op}} X^{k-1} \to 0$$

и изоморфизмам $\varprojlim^k_{I^{op}} A \cong \varprojlim^{k-1}_{I^{op}} X^1 \cong \cdots \cong \varprojlim^1_{I^{op}} X^{k-1}$.

Следовательно $\varprojlim^k A = 0$ тогда и только тогда, когда гомоморфизмы $\varprojlim F^{k-1} \to \varprojlim X^k$ сюръективны.

С помощью индукции по n докажем, что $\varprojlim^k_{I^{op}} A = 0$ для всех $k \geqslant n+2$. Пусть это верно при $|I| \leqslant \aleph_{n-1}$. Докажем для $|I| = \aleph_n$.

По лемме 1.2.2 в этом случае I равно объединению такого семейства направленных подмножеств $\{I_\mu\}_{\mu \in \aleph_n}$, что

- $I_\mu \subseteq I_\nu$ для всех $\mu < \nu$
- $\bigcup\limits_{\mu<\nu} I_\mu = I_\nu$, для всякого предельного ординала $\nu < \aleph_n$
- $|I_\mu| < \aleph_n$ для всех $\mu \in \aleph_n$

Пусть $k \geqslant n+2$. Нам нужно доказать точность верхней последовательности в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim_{I^{op}} X^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_{I^{op}} F^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_{I^{op}} X^k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim X^{k-1}|_{I_\mu} \arrow[r] & \varprojlim F^{k-1}|_{I_\mu} \arrow[r] & \varprojlim X^k|_{I_\mu} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Нижняя последовательность точна. Для всех $\mu \in \aleph_n$ верно $|I_\mu| \leqslant \aleph_{n-1}$. Поэтому, согласно предположению индукции, из-за выполнения неравенства $k-1 \geqslant (n-1)+2$, при $\mu < \nu < \aleph_n$ точны последовательности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim X^{k-2}|_{I_\nu} \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim F^{k-2}|_{I_\nu} \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim X^{k-1}|_{I_\nu} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim X^{k-2}|_{I_\mu} \arrow[r] & \varprojlim F^{k-2}|_{I_\mu} \arrow[r] & \varprojlim X^{k-1}|_{I_\mu} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

откуда следует сюръективность гомоморфизма $\varprojlim X^{k-1}|_{I_\nu} \longrightarrow \varprojlim X^{k-1}|_{I_\mu}$.

Для доказательства точности верхней последовательности в диаграмме (3.1) рассмотрим произвольный $s \in \varprojlim_{I^{op}} X^k$ и множество пар (t, μ), упорядоченных отношением

$$(t, \mu) \leqslant (t', \nu) \Leftrightarrow I_\mu \subseteq I_\nu \text{ и } t'|_{I_\mu} = t.$$

Поскольку каждое линейно упорядоченное подмножество этого множества пар ограничено сверху, то во множестве пар найдется некоторый максимальный элемент (t, μ). Для любого $\nu > \mu$, $\nu \in \aleph_n$, существует такой $t' \in \varprojlim F^{k-1}|_{I_\nu}$, что образ t' в $\varprojlim X^k|_{I_\nu}$ равен $s|_{I_\nu}$. Но его ограничение на I_μ может не совпадать с t. Тем не менее, разность $t - t'|_{I_\mu}$ принадлежит $\varprojlim X^{k-1}|_{I_\mu}$. Пусть r – пробраз этой разности в $\varprojlim X^{k-1}|_{I_\nu}$. Тогда $(r + t')| = t$ влечет неравенство $(t, \mu) < (r + t', \nu)$, противоречащее максимальности (t, μ). Следовательно, существует прообраз нити s принадлежащий $\varprojlim_{I^{op}} F^{k-1}$. Получаем $\varprojlim^k_{I^{op}} A = 0$ при $k \geqslant n + 2$. $\square$

Глава 4

Кольца с несколькими объектами

Данная часть посвящена теореме Митчела о когомологической размерности направленных множеств. Ее доказательство состоит из двух частей, первая из которых была опубликована в [12], а вторая – в [13]. Главная идея Митчела состоит в обобщении гомологической теории колец на предаддитивные категории.

4.1 Предаддитивные категории

Пусть $\mathscr{C}$ – малая предаддитивная категория. Это означает, что для любых ее объектов A и B множество $\mathscr{C}(A, B)$ наделено структурой абелевой группы $\mathrm{Hom}(A, B)$, относительной которой отображения $\mathscr{C}(\alpha, \beta)$ являются гомоморфизмами.

Пусть $\mathscr{C}^A = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -) : \mathscr{C} \to Ab$ - функторы морфизмов. Имеет место аддитивная лемма Ионеды

Лемма 4.1.1 *Существуют естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{Hom}_{Add(\mathscr{C},Ab)}(\mathscr{C}^A, M) \stackrel{\cong}{\to} M(A)$$

Доказательство. С помощью отображения

$$(\mathscr{C}^A \stackrel{\alpha}{\to} M) \mapsto \alpha_A(1_A) \in M(A).$$

Обратное отображение каждому $x \in M(A)$ ставит в соответствие естественное преобразование $\widetilde{x} : \mathscr{C}^A \to M$ определенное как $\widetilde{x}_B(f) = M(f)(x)$. $\square$

Для каждого $x \in M(A)$ объект A обозначается через $|x|$.

Семейство элементов $x_i \in M(|x_i|)$, $i \in J$, (или морфизмов $\mathscr{C}^{|x_i|} \xrightarrow{\widetilde{x_i}} M$) называется семейством образующих, если соответствующее естественное преобразование

$$\bigoplus_{i \in J} \mathscr{C}^{|x_i|} \to M \ , \tag{4.1}$$

является эпиморфизмом. Это семейство называется *базисом*, если морфизм (4.1) – изоморфизм. Если существует базис, то функтор M называется *свободным*. Порожденный одним элементом функтор называется *циклическим*, конечным числом элементов – *конечно-порожденным*. *Конечно-представимый* функтор является коядром морфизма свободных конечно-порожденных функторов. Согласно Бурбаки [2, Глава 1, §2, упр. 10, стр. 46-47], всякий функтор $M \in Add(\mathscr{C}, \mathrm{Ab})$ – прямой предел конечно-представимых.

4.2 Теорема Капланского

Эта часть посвящена теореме Капланского о том, что всякий проективный модуль изоморфен прямой сумме счетно порожденных. Она была получена в работе [10]. На русском языке доказательство имеется в книге Каша [5, Гл. 13].

Рассмотрим малую предаддитивную категорию $\mathscr{C}$. Под *$\mathscr{C}$-модулями*, или просто *модулями*, мы будем подразумевать аддитивные функторы $\mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$.

Лемма 4.2.1 *Для произвольных модулей A, B и подмодуля $D \subseteq A \oplus B$ существование подмодулей $A_1 \subseteq A$ и $B_1 \subseteq B$, прямая сумма которых $A_1 \oplus B_1$ равна D, равносильно выполнению равенства*

$$D = (A \cap D) \oplus (B \cap D) \ . \tag{4.2}$$

Доказательство. Если (4.2) выполнено, то полагая $A_1 = A \cap D$, $B_1 = B \cap D$, получим $A_1 \oplus B_1 = D$. Наоборот, если $D = A_1 \oplus B_1$, то $A \cap D \subseteq A \oplus B$ состоит из элементов $a + b$, для которых $a + b \in A = A \oplus 0$ и

$a+b \in D = A_1 \oplus B_1$, откуда $b=0$ и $a \in A_1$. Следовательно, $A \cap D = A_1$. Аналогично $B \cap D = B_1$. Это влечет равенство (4.2). $\square$

Предложение 4.2.2 *Пусть A и B – модули, для которых существует семейство таких счетно порожденных модулей $\{M_j\}_{j\in J}$, что $A \oplus B = \bigoplus\limits_{j\in J} M_j$. Тогда для любых подмножества $H \subsetneq J$ и подмодулей $A_H \subseteq A$ и $B_H \subseteq B$, прямая сумма которых $A_H \oplus B_H$ равна $\bigoplus\limits_{j\in H} M_j$, существуют подмножество $I \subseteq J$, $I \neq H$, и подмодули $A_I \supseteq A_H$ и $B_I \supseteq B_H$:*

$$\begin{tikzcd}
A \oplus B \arrow[r, phantom, "="] & \bigoplus\limits_{j\in J} M_j \\
A_I \oplus B_I \arrow[u, dashed, "\subseteq"] \arrow[r, phantom, "="] & \bigoplus\limits_{j\in I} M_j \arrow[u, dashed, "\subseteq"] \\
A_H \oplus B_H \arrow[u, dashed, "\subset"] \arrow[r, phantom, "="] & \bigoplus\limits_{j\in H} M_j \arrow[u, dashed, "\subset"]
\end{tikzcd}$$

такие, что $A_I = A_H \oplus C$ для некоторого счетно порожденного модуля C.

Доказательство. Идея стандартна. Для того, чтобы найти D, удовлетворяющий равенству (4.2), берется возрастающая по включению последовательность подмодулей $D_{n+1} \supset (A \cap D_n) \oplus (B \cup D_n)$. Ее объединение будет удовлетворять уравнению (4.2).

Пусть $\alpha : A \oplus B \to A \oplus B$ и $\beta : A \oplus B \to A \oplus B$ – канонические морфизмы прямой суммы, $\alpha + \beta = 1_{A\oplus B}$. Возьмем произвольный $i_0 \in J \setminus H$. Положим $I_0 = \{i_0\}$. Поскольку M_{i_0} счетно порожден, то его образы $\alpha(M_{i_0})$ и $\beta(M_{i_0})$ – счетно порждены. Поэтому для некоторого счетного $I_1 \subseteq J$ будут иметь место включения

$$M_{i_0} \subseteq \alpha(M_{i_0}) + \beta(M_{i_0}) \subseteq \bigoplus_{j\in I_1} M_j$$

Поскольку каждый M_j счетно порожден, то $\bigoplus\limits_{j\in I_1} M_j$ – счетно порожден. Значит существует счетное $I_2 \subseteq J$, для которого

$$\bigoplus_{j\in I_1} M_j \subseteq \alpha(\bigoplus_{j\in I_1} M_j) + \beta(\bigoplus_{j\in I_1} M_j) \subseteq \bigoplus_{j\in I_2} M_j$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность счетных множеств I_n, для которых

$$\bigoplus_{j\in I_n} M_j \subseteq \alpha(\bigoplus_{j\in I_n} M_j) + \beta(\bigoplus_{j\in I_n} M_j) \subseteq \bigoplus_{j\in I_{n+1}} M_j$$

Так как $\alpha(\bigoplus\limits_{j\in I_n} M_j) \subseteq A$ и $\beta(\bigoplus\limits_{j\in I_n} M_j) \subseteq B$, то отсюда следует $\alpha(\bigoplus\limits_{j\in I_n} M_j) \subseteq A \cap \bigoplus\limits_{j\in I_{n+1}} M_j$ и $\beta(\bigoplus\limits_{j\in I_n} M_j) \subseteq B \cap \bigoplus\limits_{j\in I_{n+1}} M_j$. Получаем включения

$$\bigoplus_{j\in I_n} M_j \subseteq A \cap \bigoplus_{j\in I_{n+1}} M_j + B \cap \bigoplus_{j\in I_{n+1}} M_j \subseteq \bigoplus_{j\in I_{n+1}} M_j\ . \tag{4.3}$$

Обозначим $L = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} I_n$. Множества L и $L\setminus H$ счетны. Положим $I = H\cup L$. Пусть

$$W = A_H \oplus B_H, \quad V = \bigoplus_{j\in L\setminus H} M_j\ , \quad W = \bigoplus_{j\in I} M_j = U \oplus V\ .$$

Докажем $W = (A\cap W)\oplus(B\cap W)$. Включение $(A\cap W)\oplus(B\cap W) \subseteq W$ очевидно. Для доказательства обратного включения покажем, что для каждого $j \in I$ верно включение $M_j \subseteq (A\cap W)\oplus(B\cap W)$. Для $j \in H$ это вытекает из предположения. Если $j \in L \subseteq H$, то $j \in I_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В этом случае это включение имеет место согласно формуле (4.3). Из равенств

$$W = U \oplus V = (A\cap U)\oplus(B\cap U)\oplus V$$

и закона модулярности следует $A\cap W = (A\cap U)\oplus C$, $B\cap W = (B\cap U)\oplus D$, где

$$C = ((B\cap U)\oplus V)\cap A, \quad D = ((A\cap U)\oplus V)\cap V\ .$$

Отсюда получаем

$$W = (A\cap W)\oplus(B\cap W) = (A\cap U)\oplus(B\cap U)\oplus C\oplus D = U\oplus C\oplus D\ .$$

Поскольку $W = U\oplus V$, то отсюда следует, что $V \cong W/U \cong C\oplus D$. Стало быть, C – счетно порожденный модуль, как эпиморфный образ счетно порожденного модуля V. $\square$

Предложение 4.2.3 *Если $A \oplus B = \bigoplus\limits_{j \in J} M_j$ – прямая сумма счетно порожденных модулей M_j, то модули A и B – прямые суммы счетно порожденных модулей.*

Доказательство. Достаточно доказать, что в этом случае A будет прямой суммой счетно порожденных модулей. С помощью леммы Цорна. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – множество всех счетно порожденных подмодулей модуля A. Рассмотрим множество пар

$$P = \{(H, \Gamma) : H \subseteq J \ \& \ \Gamma \subseteq \Lambda \ \& \ A_H \oplus B_H = \bigoplus_{j \in H} M_j \ \& \ A_H = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda\}$$

упорядоченных отношением $(H_1, \Gamma_1) \leqslant (H_2, \Gamma_2) \quad \Leftrightarrow \quad H_1 \subseteq H_2 \ \& \ \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Любое линейно упорядоченное подмножество (H_i, Γ_i) этого частично упорядоченного множества пар будет ограничено парой $(\bigcup\limits_i H_i, \bigcup\limits_i \Gamma_i)$. По лемме Цорна оно имеет некоторый максимальный элемент (H, Γ). Согласно предложению 4.2.2, в случае $H \neq J$ существует такой $I \supset H$, что $\bigoplus\limits_{j \in I} M_i = A_I \oplus B_I$ и $A_I = A_H \oplus C$. В этом случае, полагая $\Gamma' = \Gamma \cup \{C\}$, получим пару $(I, \Gamma') > (H, \Gamma)$. А это противоречит максимальности (H, Γ). □

Теорема 4.2.4 (Капланский) *Каждый проективный объект в категории $Add(\mathscr{C}, \mathrm{Ab})$ равен копроизведению счетно порожденных функторов.*

Доказательство. Вытекает из только что доказанного предложения. Пусть A – проективный модуль. Рассмотрим произвольный эпиморфизм $\bigoplus\limits_{i \in I} \mathscr{C}^{|x_i|} \to A$. Он расщепляется и приводит к разложению в прямую сумму $A \oplus B = \bigoplus\limits_{i \in I} \mathscr{C}^{|x_i|}$, для некоторого B. Из доказанного выше предложения следует, что A будет счетно порожденным. □

4.3 Направленные функторы

Вводятся направленные функторы

Определение 4.3.1 *Пусть* $\mathscr{C}$ *– предаддитивная категория,* $M : \mathscr{C} \to Ab$ *– аддитивный функтор. Он называется* направленным, *если существует такое множество* M' *элементов* $x \in \coprod_{c \in Ob\mathscr{C}} M(c)$, *что*

1. *Естественное преобразование* $\bigoplus_{x \in M'} \mathscr{C}^{|x|} \xrightarrow{\{\widetilde{x}\}_{x \in M'}} M$ *является эпиморфизмом* (M' *порождает* M)
2. $\forall x \in M'$ *естественное преобразование* $\widetilde{x} : \mathscr{C}^{|x|} \to M$ *является мономорфизмом*
3. *отношение порядка* $x \leqslant y$ *если существует коммутативный треугольник*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{|x|} \arrow[rr, "\widetilde{x}"] \arrow[dr, "x \leqslant y"'] & & M \\ & \mathscr{C}^{|y|} \arrow[ur, "\widetilde{y}"'] & \end{tikzcd}$$

превращает M' *в направленное множество.*

В этом случае M' *называется множеством свободных образующих.*

Поскольку M' состоит из мономорфизмов, то полная подкатегория категории $\mathscr{C}^{op}/M$ имеющая класс объектов M', будет частично упорядоченным множеством. Максимальное M' с этими свойствами состоит из всех мономорфизмов $\mathscr{C}^A \to M$.

Пример 4.3.2 $\mathscr{C} = RI^{op}$, $M = \Delta_{I^{op}} R$, M' *состоит из единиц* $1 \in \Delta_{I^{op}} R(j) = R$, *заданных для каждого* $j \in I$.

Лемма 4.3.1 *Если* $M \in Add(\mathscr{C}, Ab)$ *имеет множество свободных образующих, то* $M \cong \varinjlim^{M'} \{\mathscr{C}^{|x|}\}_{x \in M'}$.

Доказательство. Поскольку $Add(\mathscr{C}, Ab)$ - категория с точными направленными копределами, то морфизм построенный с помощью свойства универсальности копредела $\nu : \varinjlim^{M'} \{\mathscr{C}^{|x|}\}_{x \in M'} \to M$ является мономорфизмом. Он делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{x \in M'} \mathscr{C}^{|x|} \arrow[rr, "\{\widetilde{x}\}"] \arrow[dr, "\{\lambda_x\}"'] & & M \\ & \varinjlim^{M'} \{\mathscr{C}^{|x|}\}_{x \in M'} \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

где $\lambda_x : \mathscr{C}^{|x|} \to \varinjlim^{M'} \{\mathscr{C}^{|x|}\}_{x\in M'}$ – конус морфизмов копредела. Поскольку верхний морфизм является эпиморфизмом, то ν – эпиморфизм. Следовательно, ν – изоморфизм. □

4.4 Когомологическая размерность направленных множеств конфинальности $\aleph_n$

До конца этой части M будет обозначать направленный функтор с множеством свободных образующих M'. Это накладывает некоторое ограничение на функтор M, хотя с другой стороны нет дополнительных предположений о предаддитивной категории $\mathscr{C}$. Мы зафиксируем отображение $u : M' \times M' \to M'$, удовлетворяющее для всех $x, y \in M'$ неравенствам $u(x,y) \geqslant x$ и $u(x,y) \geqslant y$. Подмножество $X \subseteq M'$ называется u-замкнутым, если $u(X\times X) \subseteq X$. Каждое подмножество $X \subseteq M'$ имеет наименьшее содержащее его u-замкнутое подмножество $\mathrm{cl}(X)$. Полагая $X_0 = X$ и $X_{n+1} = X_n \cup u(X_n \times X_n)$, мы получим $\mathrm{cl}(X) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n$. Если X бесконечно, то $|\,\mathrm{cl}(X)| = |X|$. Если X – u-замкнуто, то подфунктор из M порожденный множеством X будет направленным.

Пусть $X \subseteq M'$ – произвольное подмножество. Рассмотрим последовательность функторов

$$P_n(X) = \bigoplus_{x_0 \geqslant \cdots \geqslant x_n,\ x_i \in X} \mathscr{C}^{|x_n|}$$

Положим $P_{-1}(X) \subseteq M$ – подфунктор, порожденный X. Определим морфизмы $d_n : P_n(X) \to P_{n-1}(X)$ как естественные по $c \in \mathscr{C}$ гомоморфизмы, определенные на $\alpha \in \mathscr{C}(|x_n|, c)$

$$\begin{aligned}(d_n)_c([x_0 \geqslant \cdots \geqslant x_n], \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i ([x_0 \geqslant \cdots \geqslant \widehat{x_i} \geqslant \cdots \geqslant x_n], \alpha) \\ + (-1)^n ([x_0 \geqslant \cdots \geqslant x_{n-1}], \alpha \circ (|x_{n-1}| \to |x_n|))\end{aligned}$$

Гомологии этого комплекса равны $\varinjlim_n^X \{\mathscr{C}^{|x|}\}$.

Лемма 4.4.1 *Если $X \subseteq M'$ направленное множество, то точна последовательность*

$$0 \leftarrow P_{-1}X \overset{d_0}{\leftarrow} P_0 X \overset{d_1}{\leftarrow} P_1 X \overset{d_2}{\leftarrow} \cdots$$

Предложение 4.4.2 *Если* $|M'| \leqslant \aleph_n$, *то* $\mathrm{p.d.}\, M \leqslant n+1$.

Доказательство. $\mathrm{Ext}^k(M, G) \cong \varprojlim^k_{M'} G(j) = 0$, при $k \geqslant n+2$. □

Пусть $\xi \in P_n(M')(c) = \bigoplus\limits_{x_0 \geqslant \dots \geqslant x_n} \mathscr{C}^{|x_n|}(c)$. Тогда существует конечное множество наборов $x_0^k \geqslant \dots \geqslant x_n^k$, слагаемые при которых вносят ненулевой вклад в ξ. Мы будем говорить, что элементы x_t^k *появляются* в ξ. Положим

$$a(S) = \{x \in M' : x \text{ появляется в некотором } \xi \in S\}.$$

Если S бесконечно, то $|a(S)| \leqslant |S|$.

Лемма 4.4.3 *Предположим, что* $\mathrm{p.d.}\, M \leqslant k$, *где* $k > 0$. *И пусть* M *не содержит порождающих его подмножеств мощности* $\leqslant \aleph_n$. *Тогда существует такое и-замкнутое подмножество* $X \subseteq M'$, *что*

1. $|X| = \aleph_n$
2. *нет подмножеств мощностей* $< \aleph_n$ *порождающих* $P_{-1}(X)$
3. $d_k(P_k(X))$ *является ретрактом* $d_k(P_k(M'))$

Доказательство. С помощью теоремы Капланского. Рассмотрим коммутативную диаграмму, связанную с вложением произвольного направленного подмножества $X \subset M'$

$$\begin{tikzcd}
P_k(M') \arrow[rr, "d_k"] \arrow[dr] & & P_{k-1}(M') \\
& d_k(P_k(M')) \arrow[ur] & \\
P_k(X) \arrow[uu] \arrow[rr, "d_k"] \arrow[dr] & & P_{k-1}(X) \arrow[uu] \\
& d_k(P_k(X)) \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\mathrm{p.d.}\, M \leqslant k$, то модуль $d_k(P_k(M'))$ проективен. По теореме Капланского существует такое семейство $\{Q_i\}_{i \in I}$ счетно порожденных модулей, что

$$d_k(P_k(M')) = \bigoplus_{i \in I} Q_i \ .$$

Для любого подмодуля $N \subseteq d_k(P_k(M'))$ обозначим

$$N^\dagger = \bigoplus_{i \in J} Q_i \ ,$$

где J – минимальное, для которого $N \subseteq \bigoplus\limits_{i \in J} Q_i$. Заметим, что если N порожден бесконечным множеством N', то $N^\dagger$ порожден множеством не большей мощности, ибо каждый элемент из N' появляется не более, чем в конечном числе модулей Q_i, и Q_i – счетно порождены.

Теперь для каждого ординала $\alpha < \aleph_n$ построим u-замкнутое подмножество X_α. С этой целью возьмем $X_0 = \emptyset$. Если α – предельный ординал, то положим

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta \ .$$

Заметим, что $|X_\alpha| \leqslant \aleph_n$ влечет $|X_\beta| \leqslant \aleph_n$ для всех $\beta < \alpha$. Предполагая, что $|X_\alpha| \leqslant \aleph_n$ определим

$$X_{\alpha+1} = \mathrm{cl}(X_\alpha \cup \{x\} \cup a(R[d_k(P_k(X_\alpha))]^\dagger)),$$

где x – произвольный элемент из M' не принадлежащий $P_{-1}(X_\alpha)$, а $R[d_k(P_k(X_\alpha))]^\dagger$ – множество элементов из $P_k(M')$ отображающихся на множество образующих модуля $[d_k(P_k(X_\alpha))]^\dagger$. Такой x всегда существует, ибо $|X_\alpha| \leqslant \aleph_n$, тогда как M не может быть порожден $\aleph_n$ элементами. Также, поскольку $|X_\alpha| \leqslant \aleph_n$, то $P_k(X_\alpha)$ будет $\aleph_n$-порожденным, и то же самое будет верно для $d_k(P_k(X_\alpha))$, и значит для $[d_k(P_k(X))]^\dagger$. Значит $R[d_k(P_k(X))]^\dagger$ имеет не более $\aleph_n$ элементов, и стало быть $|X_{\alpha+1}| \leqslant \aleph_n$.

Положим

$$X = \bigcup_{\alpha < \aleph_n} X_\alpha \ .$$

Тогда свойство 1 имеет место. Так как

$$P_{-1}(X) = \bigcup_{\alpha < \aleph_n} P_{-1}(X_\alpha)$$

является строго возрастающим объединением цепи подфункторов порядкового типа $\aleph_n$, то отсюда следует, что $P_{-1}(X)$ не может быть порожден меньшим чем $\aleph_n$ количеством элементов. Значит, имеет место свойство 2. Наконец, мы имеем по построению

$$[d_k(P_k(X_\alpha))]^\dagger \subseteq d_k(P_k(X_{\alpha+1})) \subseteq d_k(P_k(X))$$

для всех α. Следовательно,

$$d_k(P_k(X)) \subseteq [d_k(P_k(X))]^\dagger = \bigcup_{\alpha<\aleph_n} [d_k(P_k(X_\alpha))]^\dagger \subseteq d_k(P_k(X)) \ ,$$

откуда вытекает $d_k(P_k(X)) = [d_k(P_k(X))]^\dagger$, из которого следует свойство 2. $\square$

Предложение 4.4.4 *В условиях леммы 4.4.3, если в M' любое подмножество мощности $\aleph_n$ имеет верхнюю границу в M', то* $\mathrm{p.d.}\, P_{-1}(X) \leqslant k-1$.

Доказательство. Пусть $X \subseteq M'$ – подмножество мощности $\aleph_n$, для которого $d_kP_k(X)$ – ретракт функтора $d_kP_k(M')$. По условию, существует $z \in M'$, для которого $\Lambda_z \subseteq X$, где $\Lambda_z = \{y \in M' : z \geqslant y\}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
d_kP_kM' \arrow[r, tail] \arrow[dd, bend right=60, "r"'] & P_{k-1}M' \arrow[r] & P_{k-2}M' \arrow[r] & \cdots \\
d_kP_k\Lambda_z \arrow[u, tail, "\nu"] \arrow[r, tail, shift right, "\eta"'] & P_{k-1}\Lambda_z \arrow[u, tail] \arrow[l, shift right, "\varepsilon"'] \arrow[r] & P_{k-2}\Lambda_z \arrow[u, tail] \arrow[r] & \cdots \\
d_kP_kX \arrow[u, tail, "\mu"] \arrow[r, tail, shift right, "\eta'"'] & P_{k-1}X \arrow[u, tail, "\mu'"'] \arrow[l, shift right, "\rho"'] \arrow[r, two heads] & d_{k-1}P_{k-1}X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Верно равенство $r\nu\mu = 1_{d_kP_kX}$, по лемме 4.4.3. Поскольку $\mathrm{p.d.}\,\Lambda_z = 0$, то $d_kP_k\Lambda_z$ – прямое слагаемое в $P_{k-1}\Lambda_z$. Положим $\rho = r\nu\varepsilon\mu'$. Имеют место соотношения

$$\rho\eta' = r\nu\varepsilon\mu'\eta' = r\nu\varepsilon\eta\mu = r\nu\mu = 1_{d_kP_kX}.$$

Отсюда следует расщепляемость эпиморфизма $P_{k-1}X \to d_{k-1}P_{k-1}X$ и проективность объекта $d_{k-1}P_{k-1}X$. $\square$

Теорема 4.4.5 $\mathrm{c.d.}\aleph_n^{op} = n+1$.

Доказательство. С помощью индукции по $n \geqslant 0$. При $n=0$ это верно, как показывают простые примеры. Например, $\varprojlim^1\{\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}\} \neq 0$. Пусть утверждение верно для n. Докажем для $I = \aleph_{n+1}$. Пусть $M = \Delta_{I^{op}}\mathbb{Z}$, $M' = \aleph_{n+1}$. Предположим, что $\mathrm{p.d.}\, M \leqslant k$, для некоторого $k \geqslant 0$. Поскольку $|M'| > \aleph_n$, то по лемме 4.4.3 существует такое $X \subseteq M'$, что

1. $|X| = \aleph_n$

2. Нет подмножеств мощности $< \aleph_n$ порождающих $P_{-1}(X)$, ибо X не содержит конфинальных подмножеств мощности $\aleph_{n-1}$

3. $d_k P_k(X)$ – ретракт в $d_k P_k(M')$

Сверх того, в $M' = \aleph_{n+1}$ любое подмножество мощности $\aleph_n$ ограничено некоторым $z \in M'$. Стало быть, по предложению 4.4.4 имеет место $\mathrm{p.d.}\, P_{-1}(X) \leqslant k-1$. Но, поскольку $|X| = \aleph_n$, то $\mathrm{p.d.}\, P_{-1}X = \mathrm{c.d.} X^{op} = n+1$. Отсюда $\mathrm{p.d.}\, M = n+2$, ибо $\mathrm{p.d.}\, M < n+2$ влекло бы $\mathrm{p.d.}\, P_{-1}X < n+1$. □

Лемма 4.4.6 *Пусть X – направленное множество конфинальности $\aleph_n$. Тогда существует конфинальное неубывающее отображение $S : X \to \omega_n$.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha : \alpha < \omega_n\}$ – конфинальное подмножество из X. Для $x \in X$ положим $S(x)$ равным наименьшему α, для которого $x \leqslant x_\alpha$. Легко видеть, что отображение S – неубывающее. Если бы образ отображения S не был бы конфинальным в ω_n, то в X существовало бы конфинальное подмножество мощности меньшей чем $\aleph_n$. □

Теорема 4.4.7 *Пусть I – направленное множество конфинальности $\aleph_n$. Тогда* $\mathrm{c.d.} I^{op} = n+1$.

Доказательство. По теореме Гобло имеет место неравенство $\mathrm{c.d.} I^{op} \leqslant n+1$. Рассмотрим конфинальное отображение $S : I \to \omega_n$. Поскольку $\mathrm{c.d.}\omega_n^{op} = n+1$, то существует такая проективная система $A : \omega_n^{op} \to \mathrm{Ab}$, что $\varprojlim^{n+1}_{\omega_n^{op}} A \neq 0$. В силу конфинальности S получаем $\varprojlim^{n+1}_{I^{op}} A \circ S \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{c.d.} I^{op} \geqslant n+1$. □

Глава 5

Приложения

Легко придумать множества, конфинальность которых зависит от гипотезы континуума. В работе [7] этот факт используется для построения линейных отображений, сюръективность которых зависит от гипотезы континуума. Более того, в [7] указывается пример бесконечной системы линейных уравнений, существование решения которой зависит от гипотезы континуума.

Литература

[1] Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. - М.: Мир, 1971. 708 с.

[2] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. - М.: Мир, 1972. 260 с.

[3] Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. - М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

[4] Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. - М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

[5] Каш Ф. Модули и кольца. - М.: Мир, 1981. 368 с.

[6] Маклейн С. *Гомология.* - М.: Мир, 1966. 544 с.

[7] Хусаинов А. А. Разрешимость уравнений и гипотеза континуума. // Дальневосточный математический журнал 2003. Т.4, N 2. С.162-166. http://husainov51.narod.ru/publications.html

[8] Goblot R. *Sur les dérivés de certaines limites projectives. Applications aux modules.* // Bull. Sci. Math. 1970. V.94. P.251-255.

[9] Jensen C.U. *Les foncteurs dérivés de* $\varprojlim$ *et leurs applications en théorie des modules.* Berlin etc.: Springer, 1972. (Lecture Notes in Math. 254)

[10] Kaplansky I. *Projective modules.* // Ann. of Math. 1958. V.68. P. 372 - 377.

[11] Mac Lane S. *Categories for the working Mathematician.* N. Y. a. o. : Springer-Verlag, 1971 (Graduate Texts in Mathematics).

[12] Mitchell B. *Rings with several objects.* // Adv. Math. 1972. V.8. P.1-161.

[13] Mitchell B. *The cohomological dimension of a directed set.* // Canad. J.Math.1973. V.25, N 2. P.233-238.

[14] Roos J.-E. *Sur les foncteurs dérivés de lim. Applications.* // C. r. Acad. sci. Paris. Sér A. 1961. T.252, N 24. P. 3702 - 3704.