ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ МАЛЫХ КАТЕГОРИЙ *

Хусаинов А. А.

Гомологическая теория размерности малых категорий была основана Митчелом в 1968–1982 годах. Эта теория связана с условиями вырождения производных функторов функтора предела. Она изучает различные размерности малых категорий и глобальную размерность категории функторов. Цель данной статьи – описать проблемы и результаты гомологической теории размерности малых категорий.

Ниже везде $\mathbf{N}$ будет обозначать множество неотрицательных целых чисел, $\mathbf{Z}$ – кольцо целых чисел, Ab – категорию абелевых групп и гомоморфизмов, Ens – категорию множеств, $L : Ens \to Ab$ – функтор, сопоставляющий каждому множеству E свободную абелеву группу с базисом E и каждому отображению f – гомоморфизм, продолжающий f. Для любого подмножества из $\mathbf{N}$ верхняя грань будет рассматриваться в $\{-1\} \cup \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. В частности, $sup\, \emptyset = -1$.

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория. Интерпретация Ионеды элементов группы $\mathrm{Ext}^n(A, B)$, как классов точных последовательностей длины n от B к A [186], позволяет определить *проективную размерность* $\mathrm{p.d.}\, A$ объекта A из $\mathcal{A}$ как верхнюю грань натуральных чисел n, для которых функтор $\mathrm{Ext}^n(A, -) : \mathcal{A} \to Ab$ не равен 0. Если $A = 0$, то не существует $n \geq 0$, для которых $\mathrm{Ext}^n(A, -) \neq 0$. Значит $\mathrm{p.d.}\, 0 = -1$.

Глобальной размерностью $\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}$ абелевой категории $\mathcal{A}$ называется верхняя грань проективных размерностей $A \in Ob\mathcal{A}$. Теория глобальной размерности категории функторов восходит к древнейшим результатам гомологической алгебры, таким как теорема Гильберта о цепях сизигий и теорема Машке. Митчел показал, что большая часть гомологической теории модулей обобщается на функторы, заданные на предаддитивных категориях.

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная категория, $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ – категория функторов $\mathbb{C} \to \mathcal{A}$. Для каждого объекта $A \in Ob\mathcal{A}$ рассмотрим функтор $\Delta_{\mathbb{C}} A : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, принимающий постоянные значения, равные A на объектах и $1_A : A \to A$ – на морфизмах. Полагая $(\Delta_{\mathbb{C}} f)_c = f$ на морфизмах $f : A \to B$ категории $\mathbb{C}$, для всех $c \in Ob\,\mathbb{C}$, мы получаем *диагональный функтор* $\Delta_{\mathbb{C}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Под *функтором предела* $\lim_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}$ мы понимаем правый сопряженный к

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования России и Академии наук Турции

диагональному функтору. Левый сопряженный к $\Delta_{\mathbb{C}}$ называется *функтором копредела* $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}$.

Пусть R – кольцо с 1, $\mathbb{C}$ – малая категория, а Mod_R обозначает категорию левых R–модулей. *R-когомологическая размерность* $\text{c.d.}_R\,\mathbb{C}$ определяется как проективная размерность объекта $\Delta_{\mathbb{C}} R \in Mod_R^{\mathbb{C}}$. Обозначим число $\text{c.d.}_{\mathbf{Z}}\,\mathbb{C}$ через $\text{c.d.}\,\mathbb{C}$ и будем называть его просто *когомологической размерностью.*

Митчел получил полные результаты о значениях $\text{c.d.}_R\,\mathbb{C}$ в случае категории $\mathbb{C}$, двойственной направленному множеству [138]. Лаудал [123] охарактеризовал малые категории когомологической размерности нуль.

Пусть K – ненулевое коммутативное кольцо с 1, $\mathbb{C}$ – малая категория. Обозначим двойственную к $\mathbb{C}$ категорию через $\mathbb{C}^{op}$. Пусть $K\,\mathbb{C}(a,b)$ – свободные K–модули, порожденные множествами $\mathbb{C}(a,b)$ морфизмов $a \to b$ из $\mathbb{C}$. K–модульные гомоморфизмы $K\,\mathbb{C}(f,g) : K\,\mathbb{C}(a_1,b_1) \to K\,\mathbb{C}(a_2,b_2)$, действующие на $\alpha \in \mathbb{C}(a_1,b_1)$ для всех $f \in \mathbb{C}(a_2,a_1)$, $g \in \mathbb{C}(b_1,b_2)$ как $\alpha \mapsto g \circ \alpha \circ f$, дают функтор $K\,\mathbb{C} : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to Mod_K$.

Размерностью Хохшильда–Митчела $\dim_K \mathbb{C}$ называется проективная размерность объекта $K\,\mathbb{C} \in Mod_K^{\mathbb{C}^{op}\times\mathbb{C}}$.

В случае $K = \mathbf{Z}$ обозначим размерность Хохшильда–Митчела через $\dim\,\mathbb{C}$.

Митчел доказал, что верхняя оценка глобальной размерности категории функторов

$$\text{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \leq \dim\,\mathbb{C} + \text{gl.dim}\,\mathcal{A}$$

верна для абелевых категорий $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями.

В [133] Митчел выдвинул предположение о том, что каждый моноид с сокращениями когомологической размерности $\text{c.d.}\,\mathbb{C} \leq 1$ частично свободен. Новиков в [143] построил контрпримеры. С помощью результатов работы [72] можно доказать, что каждая малая категория с сокращениями размерности Хохшильда–Митчела $\dim\,\mathbb{C} \leq 1$ частично свободна. Статья [31] содержит независимое доказательство этого факта. Этот факт является обобщением теоремы Столлингса [177] и Суона [179] о группах когомологической размерности 1, ибо $\text{c.d.}\,\mathbb{C} = \dim\,\mathbb{C}$ для произвольного группоида $\mathbb{C}$. Категория называется *скелетальной*, если каждый ее изоморфизм является автоморфизмом. *Дельтой* называется малая скелетальная категория, каждый эндоморфизм в которой является тождественным. Митчел выдвинул гипотезу о том, что любая дельта размерности Хохшильда–Митчела 1 свободна, эта гипотеза была подтверждена Ченгом [62].

R-гомологическая размерность $\mathbb{C}$ определяется как

$$\text{h.d.}_R\,\mathbb{C} = sup\{n \in \mathbf{N} : \operatorname{colim}_n^{\mathbb{C}} \neq 0\},$$

где $\operatorname{colim}_n^{\mathbb{C}}$ – n-й левый производный функтор функтора копредела $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}} : Mod_R^{\mathbb{C}} \to Mod_R$. Мы опускаем R, если $R = \mathbf{Z}$. Если все компоненты связности категории $\mathbb{C}$ направлены, то $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}}$ точен, и мы имеем для таких категорий $\text{h.d.}\,\mathbb{C} = 0$. Долгое время не удавалось установить, верно ли обратное. Эта проблема была решена Исбелом и Митчелом [109].

Пользуясь случаем, хочу поблагодарить В. И. Кузьминова, познакомившего меня с данным предметом. Рад выразить благодарность Х.–И. Бауэсу, Ч. Ч. Ченгу, К. У. Иенсену, Б. В. Новикову и Т. Пирашвили за их помощь при подготовке настоящего обзора. Часть работы была сделана зимой 1999–2000, во время моего пребывания в Университете имени 19 мая. Выражаю благодарность организатору семинара Али Панжару за предоставленную возможность прочитать несколько лекций по этому материалу.

СОДЕРЖАНИЕ СТАТЬИ:

1 Когомологическая размерность малой категории

Эта часть посвящена когомологиям малых категорий с коэффициентах в функторах. Мы рассмотрим интерпретации групп когомологий категорий. Так мы увидим, что категории когомологической размерности нуль – это в точности те, у которых все дифференцирования являются внутренними. Малая категория $\mathbb{C}$ имеет когомологическую размерность $\mathrm{c.d.}\,\mathbb{C} \leq 1$, если и только если для любого функтора $F : \mathbb{C} \to Ab$ все расслоения $\mathbb{C}$ с помощью F расщепляемы. Категории со свойством $\mathrm{c.d.}\,\mathbb{C} \leq n+1$ имеют соответствующие свойства. Мы изучим свойство ацикличности проективных систем на направленных множествах и приложения к призрачным отображениям. Мы рассмотрим категории, моноиды и частично упорядоченные множества когомологической размерности 0 и 1.

1.1 Когомологии с коэффициентами в функторах

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория. Обозначим через $N_n\,\mathbb{C}$ множество всех последовательностей n компонируемых морфизмов $c_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} c_1 \stackrel{\alpha_2}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_n}{\to} c_n$ в $\mathbb{C}$, при $n > 0$, и множество всех объектов $c_0 \in Ob\,\mathbb{C}$, при $n = 0$. *Нервом категории* $\mathbb{C}$ называется симплициальное множество $N_*\,\mathbb{C}$, n-симплексами которого служат элементы $\sigma \in N_n\,\mathbb{C}$, а операторы границы и вырождения действуют следующим образом:

Граничные операторы $d_i^n : N_n\,\mathbb{C} \to N_{n-1}\,\mathbb{C}$, $0 < i < n$, удаляют объекты c_i из последовательностей $c_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} c_1 \stackrel{\alpha_2}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_n}{\to} c_n$ и заменяют морфизмы $c_{i-1} \stackrel{\alpha_i}{\to} c_i \stackrel{\alpha_{i+1}}{\to} c_{i+1}$ их композициями $c_{i-1} \stackrel{\alpha_{i+1}\circ\alpha_i}{\to} c_{i+1}$; при $i = 0$ и при $i = n$ мы полагаем $d_0^n(c_0 \to \cdots \to c_n) = (c_1 \to \cdots \to c_n)$, $d_n^n(c_0 \to \cdots \to c_n) = (c_0 \to \cdots \to c_{n-1})$. Операторы вырождения $s_i^n : N_n\,\mathbb{C} \to N_{n+1}\,\mathbb{C}$, при $0 \leq i \leq n$, вставляют в $c_0 \to \cdots \to c_n$ тождественный морфизм $c_i \to c_i$.

Коцепной комплекс. Пусть $F : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ – функтор из малой категории $\mathbb{C}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}$ с (бесконечными) произведениями. Для произвольного семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ объектов обозначим через $pr_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ проекции произведения. *Коцепной комплекс* $C^*(\mathbb{C}, F)$ состоит из произведений

$$C^n(\mathbb{C}, F) = \prod_{c_0\to\cdots\to c_n} F(c_n), \quad n \geq 0,$$

и морфизмов $\delta^n = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\delta_i^n : C^n(\mathbb{C}, F) \to C^{n+1}(\mathbb{C}, F)$, где δ_i^n определяются как удовлетворяющие для каждого

$$\sigma = (c_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} c_1 \stackrel{\alpha_2}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1}) \in N_{n+1}\,\mathbb{C}$$

равенствам

$$pr_\sigma \circ \delta_i^n = \begin{cases} pr_{d_i^{n+1}\sigma} \quad , & 0 \leq i \leq n \\ F(c_n \stackrel{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1}) \circ pr_{d_{n+1}^{n+1}\sigma} \quad , & i = n+1. \end{cases}$$

Положим $C^n(\mathbb{C}, F) = 0$ для всех $n < 0$. Легко проверяется, что $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, для всех $n \in \mathbf{Z}$. Определим *n-й объект когомологий категории $\mathbb{C}$ с коэффициентами в F* как

$$H^n(\mathbb{C}, F) = Ker\delta^n / Im\delta^{n-1}$$

Заметим, что если $\mathcal{A} = Mod_R$, то $C^n(\mathbb{C}, F)$ можно рассматривать как R-модуль функций

$$\varphi : N_n\,\mathbb{C} \longrightarrow \coprod_{c\in Ob\,\mathbb{C}} F(c)$$

таких, что $\varphi(c_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} c_1 \stackrel{\alpha_2}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_n}{\to} c_n) \in F(c_n)$. Тогда $\delta^n : C^n(\mathbb{C}, F) \to C^{n+1}(\mathbb{C}, F)$ будет действовать по формуле

$$(\delta^n\varphi)(c_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi(c_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} \cdots$$

$$\stackrel{\alpha_i}{\to} \hat{c}_i \stackrel{\alpha_{i+1}}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1}) + (-1)^{n+1}F(c_n \stackrel{\alpha_{n+1}}{\to} c_{n+1})(\varphi(c_0 \stackrel{\alpha_1}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_n}{\to} c_n)).$$

Правые производные предела. Предел функтора $F \in Mod_R^{\mathbb{C}}$ можно определить следующим образом:

Для каждого $\alpha \in Mor\,\mathbb{C}$ обозначим его область и кообласть как $\mathrm{dom}\,\alpha$ и $\mathrm{cod}\,\alpha$ соответственно. Под *нитью* мы понимаем любое семейство $\{x_c\}_{c\in\mathbb{C}}$ элементов $x_c \in F(c)$, таких, что для каждого $\alpha \in Mor\,\mathbb{C}$ справедливо равенство $F(\alpha)(x_{\mathrm{dom}\,\alpha}) = x_{\mathrm{cod}\,\alpha}$. Множество всех нитей составляет подмодуль в $\prod_{c\in Ob\,\mathbb{C}} F(c)$, изоморфный модулю $\lim_{\mathbb{C}} F$.

Если функтор произведения в $\mathcal{A}$ точен, то отображение $F \mapsto H^n(\mathbb{C}, F)$ задает n-й правый сателлит функтора предела $\lim_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}$ в смысле

Гротендика [94]. В частности, $H^n(\mathbb{C}, -)$ изоморфны n-м правым производным функторам функтора предела, если $\mathcal{A}$ имеет точные произведения и достаточное число инъективных объектов. Если существуют правые (левые) сателлиты функтора $\lim_{\mathbb{C}}$ ($\operatorname{colim}^{\mathbb{C}}$), то мы обозначим их через $\lim^n_{\mathbb{C}}$ ($\operatorname{colim}^{\mathbb{C}}_n$). Обозначим с помощью $H_n(N_*\mathbb{C})$ группы целочисленных гомологии нерва. Хорошо известно, что $H_n(N_*\mathbb{C}) \cong \operatorname{colim}^{\mathbb{C}}_n \Delta_{\mathbb{C}}\mathbf{Z}$, при всех $n \in \mathbf{N}$.

Иногда мы будем писать $\{F(c)\}_{c\in\mathbb{C}}$ вместо $F : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$. Таким образом, $\lim_{\mathbb{C}} F$ и $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}} F$ будут обозначаться как $\lim_{\mathbb{C}}\{F(c)\}$ и $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}}\{F(c)\}$ соответственно.

Пусть $S : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ – функтор из малой категории $\mathbb{C}$ в категорию $\mathbb{D}$. Для $d \in \mathbb{D}$ обозначим через S/d и d/S *комма-категории* $S \downarrow d$ и $d \downarrow S$, в смысле [126]. Применяя к функторам $\mathbb{C}^{op} \stackrel{S^{op}}{\to} \mathbb{D}^{op} \stackrel{F^{op}}{\to} \mathcal{A}^{op}$ результат Оберста из [146, Теорема 2.3], получаем

Теорема 1.1 *(Оберст) Пусть $S : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ – функтор между малыми категориями. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) категории S/d связны, и $H_n(N_*(S/d)) = 0, \forall n > 0$;

(2) для произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными произведениями и для любого функтора $F : \mathbb{D} \to \mathcal{A}$ канонические морфизмы

$$\lim{}^n_{\mathbb{D}} F \to \lim{}^n_{\mathbb{C}} (F \circ S)$$

являются изоморфизмами для всех $n \in \mathbf{N}$;

(3) условие (2) верно при $\mathcal{A} = Ab$.

1.2 Когомологии направленных множеств

Каждое частично упорядоченное множество (сокращенно *ч.у. множество*) $(I, \leq)$ будем рассматривать как малую категорию с множеством объектов $ObI = I$, в которой для любых $a, b \in I$ множество $I(a,b)$ морфизмов $a \to b$ состоит из единственного элемента, если $a \leq b$, и $I(a,b) = \emptyset$, в других случаях.

Направленным множеством называется ч. у. множество, в котором для любых $a, b \in I$ существует $c \in I$ такой, что $a \leq c$ и $b \leq c$. В этом разделе мы рассматриваем когомологии категорий, двойственных направленным множествам.

Пример 1.1 *[78], [111]. Пусть $\mathbb{C}$ – ч. у. множество. Обозначим через $\mathbb{C}_{top}$ топологическое пространство, в котором $U \subseteq \mathbb{C}$ объявляется открытым, когда ($y \geq x \in U \Rightarrow y \in U$). Для каждого $F \in Ab^{\mathbb{C}}$ построим пучок $\tilde{F}(U) = \lim_U F|_U$. Тогда $\lim^n_{\mathbb{C}} F \cong H^n(\mathbb{C}, \tilde{F})$, стало быть,* c.d.$\mathbb{C}$ *есть в точности когомологическая размерность топологического пространства $\mathbb{C}_{top}$, в смысле теории пучков [94]. Функтор $F \in Ab^{\mathbb{C}}$ называется вялым, если канонические отображения $\lim_{\mathbb{C}} F \to \lim_U F|_U$ сюрьективны. Мы видим, что если F вялый, то $\lim^n_{\mathbb{C}} F = 0$ для всех $n > 0$. Если I – направленное множество, и $\mathbb{C} = I^{op}$, то $\lim^n_{\mathbb{C}} F \cong \check{H}^n(\mathbb{C}_{top}, \tilde{F})$, где $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ – когомологии Чеха топологического пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.*

Вялая размерность. Пусть $\mathbb{C}$ – ч. у. множество, $F : \mathbb{C} \to Ab$ – функтор. Определим *вялую размерность* для F как нижнюю грань чисел $n \in \mathbf{N}$, для которых существуют точные последовательности в $Ab^{\mathbb{C}}$

$$0 \to F \to F^0 \to \cdots \to F^n \to 0$$

с вялыми функторами $F^0, F^1, \cdots, F^n$. *Вялой размерностью* $f.d.\,\mathbb{C}$ категории называется верхняя грань вялых размерностей функторов $F : \mathbb{C} \to Ab$.

Теорема 1.2 *[111] Пусть $\mathbb{C}$ – линейно упорядоченное множество. Тогда*

$$f.d.\,\mathbb{C} = 1 + sup\{\text{c.d.}U : \ U \subset \mathbb{C} \quad U \neq \mathbb{C}\}.$$

Пополнения. Некоторые приложения [7] возникли из конструкции пополнения $\hat{A}$ абелевой группы A с помощью последовательностей Коши. Предположим, что топология на A определяется с помощью счетной базы открытых окрестностей нуля $0 \in A$, состоящей из открытых подгрупп $A_i \subseteq A$, тогда пополнение эквивалентно $\lim_{I^{op}}\{A/A_i\}$. Отсюда мы получаем точную последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow \cap A_i \longrightarrow A \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow \lim{}^1_{I^{op}}\{A_i\} \longrightarrow 0,$$

измеряющую отклонение гомоморфизма $A \to \hat{A}$ от изоморфизма.

Призрачные отображения. Пусть X – связный CW-комплекс с конечным числом клеток в каждой размерности, и пусть X_n обозначает его n-скелет. Непрерывное пунктированное отображение f из X в пространство Y называется *призрачным*, если его ограничение на каждый скелет X_n гомотопно нулевому.

Обозначим через $[X, Y]$ множество классов гомотопных непрерывных отображений $X \to Y$. Если $\{E^i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – Ω-спектр, определяющий обобщенную теорию когомологий $k^i(X) = [X, E^i]$, то из точной последовательности Милнора [131]

$$0 \to \lim{}^1_{\mathbf{N}^{op}}\{k^{i-1}(X_n)\} \to k^i(X) \to \lim_{\mathbf{N}^{op}}\{k^i(X_n)\} \to 0$$

следует, что множество призрачных отображений $X \to E^i$ эквивалентно $\lim{}^1_{\mathbf{N}^{op}}\{k^{i-1}(X_n)\}$.

Пусть $\{G_n\}$ – последовательность (некоммутативных) групп. Согласно [92] мы можем обобщить определение $\lim{}^1\{G_n\}$ следующим образом. Пусть $p : \prod_{n\in\mathbf{N}} G_n \to \prod_{n\in\mathbf{N}} G_n$ – отображение, дейсвующее по формуле

$$p(\{g_n\}) = \{g_n(p_n(g_{n+1}))^{-1}\}.$$

Тогда полагаем

$$\lim{}^1_{\mathbf{N}^{op}}\{G_n\} = \prod_{n\in\mathbf{N}} G_n/\cong, \qquad \{x_n\} \cong * \ \Leftrightarrow\ (\exists\{g_n\})\ (\{x_n\} = p\{g_n\}).$$

В [55] определение пунктированных множеств $\lim^1_{I^{op}}\{G_i\}$ обобщается на произвольные малые категории I.

Пусть $Ph(X,Y)$ – множество классов гомотопных призрачных отображений из X в Y. Как пунктированное множество оно изоморфно значению $\lim^1$ на последовательности групп и гомоморфизмов

$$0 \leftarrow [X, \Omega Y^{(1)}] \leftarrow [X, \Omega Y^{(2)}] \leftarrow \cdots \leftarrow [X, \Omega Y^{(n)}] \leftarrow \cdots,$$

где $Y^{(n)}$ – n-й член башни Постникова пространства Y. Так возникает необходимость исследования $\lim^1$ для диаграмм некоммутативных групп. Рекомендуем [129] и [130] для тех, кто заинтересуется функтором $\lim^1$ и призрачными отображениями.

Категория проективных систем. Пусть $\mathcal{A}$ – категория. *Проективной (индуктивной) системой объектов и морфизмов* в $\mathcal{A}$ называется произвольный функтор $I^{op} \to \mathcal{A}$ ($I \to \mathcal{A}$), заданный на некотором направленном множестве I. Обычно предел проективной системы $F : I^{op} \to \mathcal{A}$ обозначается через $\varprojlim_I F$, а копредел индуктивной системы $F : I \to \mathcal{A}$ – $\varinjlim_I$. Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с произведениями. Для расширения функтора $\lim^n_{I^{op}} : \mathcal{A}^{I^{op}} \to \mathcal{A}$, где I – направленное множество, годится следующая категория $pro - \mathcal{A}$:

Объекты $pro-\mathcal{A}$ – все проективные системы в $\mathcal{A}$. Множество морфизмов между $F : I^{op} \to \mathcal{A}$ и $G : J^{op} \to \mathcal{A}$ задается как

$$pro - \mathcal{A}(F,G) = \varprojlim_J \varinjlim_I \{\mathcal{A}(F(i), G(j))\}.$$

Элемент из $\varinjlim_I \{\mathcal{A}(F(i), G(j))\}$ состоит из индекса i плюс морфизма $f_i : F(i) \to G(j)$ по модулю отношения эквивалентности, при котором $f_i : F(i) \to G(j)$ и $f_{i'} : F(i') \to G(j)$ считаются эквивалентными в том случае, когда существует такой i'', что $i'' \geq i$ и $i'' \geq i'$, и $f_{i'} \circ F(i'' \geq i') = f_i \circ F(i'' \geq i)$. Таким образом, элементы из $pro - \mathcal{A}(F,G)$ представляются парами $(\varphi, \{f_j\}_{j\in J})$, где $\varphi : J \to I$ суть функции, а $f_j : F(\varphi(j)) \to G(j)$ – морфизмы категории $\mathcal{A}$. Мы полагаем два таких $(\varphi, \{f_j\}_{j\in J})$ и $(\varphi', \{f'_j\}_{j\in J})$ *эквивалентными*, если для каждого $j \in J$ существует такой $i \in I$, что $i \geq \varphi(j)$ и $i \geq \varphi'(j)$, удовлетворяющий условию коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "F(i\geq\varphi(j))"] \arrow[d, "F(i\geq\varphi'(j))"'] & F(\varphi(j)) \arrow[d, "f_j"'] \\
F(\varphi'(j)) \arrow[r, "f'_j"] & G(j)
\end{tikzcd}$$

Пусть $F : I^{op} \to \mathcal{A}$, $G : J^{op} \to \mathcal{A}$, $H : K^{op} \to \mathcal{A}$ – объекты из $pro - \mathcal{A}$. Если морфизмы $f : F \to G$ и $g : G \to H$ в $pro - \mathcal{A}$ представлены парами $(\varphi, \{f_j\}_{j\in J})$ и $(\psi, \{g_k\}_{k\in K})$, то $g \circ f : F \to H$ определен как морфизм, представленный парой $(\varphi \circ \psi, \{g_k \circ f_{\psi(k)}\}_{k\in K})$. Известно, что если

$\mathcal{A}$ – абелева категория, то $pro-\mathcal{A}$ – абелева (см. [163]). Пусть $Add(\mathcal{A}, Ab)$ – категория аддитивных функторов $\mathcal{A} \to Ab$. Многие полезные свойства $pro-\mathcal{A}$ можно получить с помощью изоморфизма $pro-\mathcal{A} \cong Lex(\mathcal{A}, Ab)^{op}$, где $Lex(\mathcal{A}, Ab) \subseteq Add(\mathcal{A}, Ab)$ – полная подкатегория, состоящая из точных слева функторов $\mathcal{A} \to Ab$. Существуют теоретико–множественные проблемы, но все они разрешаются с помощью введенного Гротендиком понятия универсума (см. [174]).

Функтор $T : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ называется *конфинальным*, если для каждого $d \in Ob\,\mathbb{D}$ существует такой объект $c \in Ob\,\mathbb{C}$, что $\mathbb{D}(d, T(c))$ не пусто. Если I и J – направленные множества, для любого конфинального функтора $T : I \to J$ существуют естественные по $F \in Mod^{J^{op}}$ изоморфизмы $\lim^n_{J^{op}} F \to \lim^n_{I^{op}} F \circ T^{op}$ [6], [138]. Артин и Мазур дали естественное представление морфизма $F \to G$ в $pro-Mod_R$ с помощью естественного преобразования в некотором $Mod_R^{K^{op}}$. Отсюда вытекает, что $pro-Mod_R$ является копределом (над классом индексов) категорий $Mod_R^{I^{op}}$. Для всякого направленного множества I коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Mod_R^{I^{op}} & \xrightarrow{\varprojlim^n_I} & Mod_R \\ \downarrow & & \downarrow = \\ pro-Mod_R & \xrightarrow{\varprojlim^n} & Mod_R, \end{array}$$

где $\varprojlim^n$ – правые производные функторы функтора $\varprojlim : pro-Mod_R \to Mod_R$. В [82] показано, что $\varprojlim^n : pro-Ab \to Ab$ изоморфны $\mathrm{Ext}^n(\Delta_{pt}\mathbf{Z}, -)$, где pt – категория с единственным объектом 0 и единственным (тождественным) морфизмом 1_0.

Т. Портер в [159]–[165] показал, что функторы $\varprojlim$ тесно связаны с теорией кручения в категории $pro-Mod_R$.

Фиксированные отображения. Миминошвили [10] описывает следующие две категории. Пусть $\mathcal{K}$ – категория, объектами которой служат пары (I, X), где I – направленные множества, а $X : I^{op} \to Ab$ – функторы. Любой морфизм $(I, X) \to (J, Y)$ задается как функтор $\varphi : J \to I$ вместе с естественным преобразованием $\omega : X \circ \varphi^{op} \to Y$. Для любого такого морфизма получаем цепной гомоморфизм $C^*(I, X) \to C^*(J, Y)$ и, вместе с тем, гомоморфизмы $\lim{}^n X \to \lim{}^n Y$. Для каждого ч. у. множества символ I^n будет обозначать множество последовательностей $i_0 < i_1 < \cdots < i_n$ в I, при $n > 0$, и $I^0 = I$, при $n = 0$.

Определение 1.2 *Фиксированным отображением* $\Phi : (I, X) \to (J, Y)$ *называется последовательность* $\{\varphi_n : J^n \to I^0\}_{n\geq 0}$, *такая, что:*

(a) $\varphi_0 : J \to I$ *есть функция,*

(b) $\varphi_n(j_0 < j_1 < \cdots < j_n) > \varphi_{n-1}(j_0 < \cdots < \hat{j_k} < \cdots j_n)$, $0 \leq k \leq n$,

(c) для каждого $j \in J$ *существует гомоморфизм* $\omega_j : X(\varphi_0(j)) \to Y(j)$,

(d) для каждой пары $(j_0 < j_1) \in J^1$ *композиция*

$$X(\varphi_1(j_0 < j_1)) \to X(\varphi_0(j_0)) \to Y(j_0)$$

равна композиции $X(\varphi_1(j_0 < j_1)) \to X(\varphi_0(j_1)) \to Y(j_1) \to Y(j_0)$.

Два фиксированных отображения Φ,Φ' *называются эквивалентными, если для любого* $j \in J$ *существует такой* $i \in I$, *что* $i > \varphi_0(j)$, $i > \varphi_0'(j)$ *и коммутативна диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} X(i) & \longrightarrow & X(\varphi_0(j)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\varphi_0'(j)) & \longrightarrow & Y(j) \end{array}$$

Рассмотрим категорию $\tilde{\mathcal{K}}$, объекты которой – все объекты категории $\mathcal{K}$, а морфизмы – классы эквивалентности фиксированных отображений. Миминошвили [10] доказал, что существует такой изоморфизм $\tilde{\mathcal{K}} \to Pro-Ab$ категорий, что для всякого $n \geq 0$ композиция $\tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow Pro-Ab \xrightarrow{\lim^n} Ab$ равна $\lim^n : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow Ab$.

Ацикличные проективные системы. Пусть R – кольцо с 1. Функтор $F : I^{op} \to Ab$ называется *ацикличным*, если $\lim^n_{I^{op}} F = 0$, $\forall n > 0$.

Мы видели, что вялые проективные системы ацикличны. Проективная система $F : I^{op} \to Ab$ *слабо вялая*, если для любого направленного подмножества $J \subseteq I$ естественное отображение $\lim_{I^{op}} F \to \lim_{J^{op}} F|_J$ сюръективно.

Теорема 1.3 *[111] Если* F *– слабо вялая проективная система, то она ациклична.*

Всякое кольцо R будет рассматриваться с дискретной топологией. Топология на левом R-модуле M называется *линейной*, если она инвариантна относительно сдвигов, и если существует фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из подмодулей.

Пусть M – левый R-модуль с хаусдорфовой линейной топологией. Модуль M называется *линейно компактным*, если для любых семейства $\{N_i\}_{i\in I}$ замкнутых подмодулей и семейства элементов $x_i \in M$ пересечение $\bigcap\limits_{i\in I}(x_i + N_i)$ не пусто тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{j\in J}(x_j + N_j) \neq \emptyset$ для всякого конечного подмножества $J \subseteq I$.

Теорема 1.4 *[111] Пусть* R *– кольцо с 1,* U *– забывающий функтор из категории топологических* R*-модулей в* Mod_R, $\{M_i\}_{i\in I}$ *– такая проективная система линейно компактных* R*-модулей, что гомоморфизмы* $M(i > j) : M_i \to M_j$ *непрерывны. Тогда* $lim^n_{I^{op}}\{U(M_i)\} = 0$, $\forall n > 0$.

Следствие 1.5 *[111] Пусть* R *– кольцо с 1. Тогда всякая проективная система артиновых левых* R*-модулей ациклична.*

Это следствие дает ответ на вопрос Ж.-Е. Руса [173, С.219]. Сначала Иенсен [110] доказал это для случаев, когда либо R нетерово, либо M_i – нетеровы (и артиновы) модули.

Категория $\mathbb{C}$ называется *фильтрованной*, если

(1) для каждой пары объектов a, b существует такой объект c, что $\mathbb{C}(a,c)$ и $\mathbb{C}(b,c)$ непусты,

(2) для каждой пары морфизмов $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(a,b)$ существует такой морфизм γ, что $\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta$.

Если $\mathbb{C}$ – ч. у. множество, то (1) в точности утверждает, что $\mathbb{C}$ является направленным. Категория, двойственная к фильтрованной, называется *кофильтрованной.*

Направленное множество I называется *конечным слева*, если для каждого $i \in I$ множество $\{i' \in I : i' < i\}$ является конечным. Для каждой фильтрованной категории I существует конечное слева направленное множество $M(I)$ и конфинальный функтор Мардежича $init : M(I) \to I$. Можно рассматривать прокатегорию функторов, определенных на кофильтрованных категориях, но функтор Мардежича позволяет доказать, что каждый объект этой прокатегории изоморфен проективной системе над конечным слева направленным множеством.

Определение 1.3 *Проективная система абелевых групп называется удовлетворяющей условию Миттаг–Леффлера (ML), если она изоморфна в pro–Ab проективной системе, гомоморфизмы которой сюръективны.*

Иногда условие ML формулируется так:

(ML) Для каждого $i \in I$ существует такой $k \geq i$, что $ImF(j \geq i) = ImF(k \geq i)$ для всех $j \geq k$.

Проективная система называется удовлетворяющей *строгому условию Миттаг–Леффлера* (SML) [83], если она изоморфна такой проективной системе $F : I^{op} \to Ab$ над конечным слева направленным множеством I, что для всех $j \in I$ естественные отображения $F(j) \to \lim\limits_{\leftarrow \{k:k<j\}} F(k)$ сюръективны.

Предложение 1.6 *[83] Проективная система абелевых групп F удовлетворяет SML тогда и только тогда, когда F изоморфна вялой проективной системе над конечным слева направленным множеством.*

Следовательно, если F удовлетворяет SML, то F ациклична.

Теорема 1.7 *[82] Если проективная система удовлетворяет SML, и если $\lim F = 0$, то F изоморфна 0 в pro-Ab.*

Эти результаты были обобщены Эдвардсом и Хастингсом [82] на проективные системы (некоммутативных) групп.

Для счетного направленного множества I, если проективная система $F : I^{op} \to Ab$ удовлетворяет ML, то F ациклична, обратное также верно в случае $|F(i)| < 2^{\aleph_0}$, для всех $i \in I$. Примеры из [83] и [19] показывают, что условие ML не влечет $\lim\limits_{\leftarrow I}{}^1 F = 0$ даже для счетных I. В [28, Следствие 2.2] доказано, что если c.d.$I^{op} \geq 1$, то существует неацикличная проективная система $F : I^{op} \to Ab$, для которой все $F(i \geq i')$ – эпиморфизмы.

Пусть E – множество, $\mathcal{A}$ – абелева категория с копроизведениями. *Суммой* $|E|$ *копий* $A \in Ob\mathcal{A}$ называется копроизведение $\sum\limits_{e\in E} A_e$, где $A_e = A$, $\forall e \in E$. Если $F : I^{op} \to Ab$ – проективная система конечных абелевых групп $F(i)$, то сумма $|E|$ копий $F \in Ab^{I^{op}}$ ациклична для каждого множества E. Кузьминов выдвинул следующее предположение в 1966 году [4, Проблема 2.35]

Гипотеза 1.4 *(K) Если проективная система конечно-порожденных абелевых групп ациклична, то суммы ее копий ацикличны.*

Эта проблема была решена в [28] и [30]:

Теорема 1.8 *Гипотеза (K) эквивалентна гипотезе Уайтхеда о том, что всякая абелева группа G, удовлетворяющая условию* $\mathrm{Ext}(G, \mathbf{Z}) = 0$, *свободна.*

В [175] Шелах доказал неразрешимость гипотезы Уайтхеда. Из [84, Следствия 7.2, 10.3] следует, что существует модель ZFC, удовлетворяющая обобщенной гипотезе континуума, в которой существуют несвободные абелевы группы G со свойством $\mathrm{Ext}(G, \mathbf{Z}) = 0$. Для такой группы будет справедливо $\underset{\leftarrow}{\lim}^1 \{Ab(G_i, \mathbf{Z})\} = 0$, где $\{G_i\}$ – индуктивная система всех конечно-порожденных подгрупп из G. Если G не свободна, то некоторая сумма копий $\{Ab(G_i, \mathbf{Z})\}$ не ациклична. В предположении $V = L$ гипотеза Уайтхеда верна (см., например, книгу [84],). Значит, в том случае гипотеза (K) верна.

В [28] была построена проективная система компактных абелевых групп, такая, что счетная сумма ее копий в в $Ab^{I^{op}}$ не ациклична. В [28] установлено, что суммы копий проективной системы торов ацикличны.

Когомологическая размерность направленных множеств. Пусть $\mathbb{C}$ – ч. у. множество. Подмножество $X \subseteq \mathbb{C}$ называется *конфинальным (коинициальным)*, если для каждого $c \in \mathbb{C}$ существует такой $x \in X$, что $c \le x$ $(x \le c)$. *Конфинальностью* $cf(\mathbb{C})$ называется наименьшая среди мощностей конфинальных подмножеств из $\mathbb{C}$. *Коинициальность* определяется как $ci(\mathbb{C}) = cf(\mathbb{C}^{op})$.

Теорема 1.9 *[138] Если I – направленное множество, удовлетворяющее $cf(I) = \aleph_n$, а R – кольцо с 1, то* $\mathrm{c.d.}_R(I^{op}) = n + 1$.

Гобло [90] доказал, что $\mathrm{c.d.}_R I^{op} \le n + 1$. В [137] эта теорема была доказана для линейно упорядоченных множеств. В [152] Ософская указала другое доказательство.

Пусть $M \subseteq Mod_R$ – подкатегория. Естественно определить *когомологическую размерность относительно* M по формуле

$$\mathrm{c.d.}_{(M,R)}\, \mathbb{C} = sup\{n \in \mathbf{N} : \lim{}^n_{\mathbb{C}}|_{M^{\mathbb{C}}} \ne 0\}.$$

В [170]–[171] Рус доказал, что если R – коммутативное нетерово кольцо с 1, то для произвольного направленного множества I и проективной системы

$\{A_i\}_{i\in I}$ конечно-порожденных модулей значения $\lim^n_{I^{op}}$ на ней нулевые для всех $n > \mathrm{gl.dim}\, Mod_R$. Иными словами, $\mathrm{c.d.}_{(M,R)} I^{op} \leq \mathrm{gl.dim}\, Mod_R$, для категории M конечно-порожденных модулей над коммутативным нетеровым кольцом.

Л. Грюсон и К. У. Иенсен в [96] доказали следующее утверждение:

Теорема 1.10 *Пусть $\{A_i\}$ – такая проективная система над направленным множеством I, что $|A_i| < \aleph_n$ для некоторого $n \geq 0$, $T : Ab \to Ab$ – произвольный точный функтор. Тогда, в предположении гипотезы $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$, справедливо равенство $\underset{\leftarrow I}{\lim}^k\{TA_i\} = 0$ для всех $k \geq n+3$. В частности, в предположении $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, мы имеем $\underset{\leftarrow I}{\lim}^k\{A_i\} = 0$ для любой проективной системы счетных абелевых групп при всех $k \geq 3$.*

В [96] замечено, что существует проективная система счетных абелевых групп $\{A_i\}$, для которой $\underset{\leftarrow I}{\lim}^2\{A_i\} \neq 0$.

Открытая проблема 1.5 *Пусть $n \geq 0$ – натуральное число, $M \subset Ab$ – полная подкатегория, состоящая из абелевых групп мощности $\leq \aleph_n$. Доказать, что для каждого направленного множества I имеет место неравенство* $\mathrm{c.d.}_{(M,\mathbf{Z})} I^{op} \leq n+2$.

Неравенство $\mathrm{c.d.}_{(M,\mathbf{Z})} I^{op} \leq n+2$ справедливо в предположении $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ по теореме 1.10.

Известно [111], что $\lim^1_{I^{op}}\{A_i\} = 0$ для каждой проективной системы артиновых R–модулей. Значит, если $M \subset Mod_R$ – полная подкатегория, состоящая из всех артиновых модулей, то $\mathrm{c.d.}_{(M,R)} I^{op} = 0$ для каждого направленного множества I.

Пусть R – кольцо с 1. *Размерность Крулля* $K-dimM$ R-модуля M определяется индуктивно. Полагаем $K-dimM = 0$ для артинового M. Положим $K-dimM = n$, если неравенство $K-dimM < n$ неверно, и для каждой убывающей последовательности

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$$

подмодулей из M все фактор модули M_i/M_{i+1}, за исключением конечного множества индексов i удовлетворяют неравенству

$$K - dim(M_i/M_{i+1}) < n.$$

Размерностью Крулля $K-dimR$ называется верхняя грань чисел $K-dimM$, где M пробегает все конечно-порожденные R-модули. Иенсен [111] доказал, что если R – локальное нетерово кольцо размерности Крулля 1, то

$$\underset{\leftarrow I}{\lim}^k\{M_i\} = 0, \quad k > 1,$$

для всех проективных систем конечно-порожденных K-модулей. Иенсен предположил в [111, С.82], что аналогичный результат верен для произвольных нетеровых колец. Грюсон [96] показал, что если R – нетерово справа кольцо и M – проективная система конечно-порожденных R-модулей, удовлетворяющих $K - dim M_i < n$ для всех $i \in I$, то $\lim\limits_{\leftarrow I}^{k}\{M_i\} = 0$ при $k > n$. Рекомендуем статью Портера [163], в которой обобщаются эти результаты.

Зависимость $\lim^{\mathbf{1}}$ от гипотезы континуума. Под моделью ZFC понимается модель теории множеств Цермело–Френкеля, в которой верна аксиома выбора. Обозначим через (CH) гипотезу континуума $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Мардежич и Прасолов построили проективную систему, ацикличность которой зависит от (CH). Пусть $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ – множество всех последовательностей

$$n = (n(0), n(1), \cdots, n(i), \cdots), \quad n(i) \in \mathbf{N}.$$

Чтобы упорядочить $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, мы полагаем $n \leq m$, если $n(i) \leq m(i)$ для всех $i \in \mathbf{N}$. Легко видеть, что $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ – направленное множество. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ положим

$$A_n = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n(i)} \mathbf{Z},$$

и возьмем в качестве $A(m \geq n) : A_m \to A_n$ естественные проекции.

В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{k+1}$ рассмотрим k–мерную сферу с центром в $(1/n, 0, ..., 0)$ и радиусом $1/n$ при $n \geq 1$, и пусть $Y^{(k)} = \cup\{S^k(n) : n \geq 1\}$; $Y^{(k)}$ называется гавайской серьгой. Пусть $X^{(k)} = \coprod_{i=0}^{\infty} Y^{(k)}$ – топологическая сумма счетного числа копий пространства $Y^{(k)}$. Топологическое пространство $X^{(k)}$ является k–мерным локально компактным сепарабельным метрическим пространством.

Пусть H_p – сильная теория гомологий Миминошвили [9]. Тогда группа $H_p(Y^{(p+1)})$ будет тривиальной для всех $p \geq 0$, и $H_p(X^{(p+1)}) = \lim^1 A$ [127]. Значит, теория H_p – не аддитивна в смысле Милнора [131] в случае, когда $\lim^1 A \neq 0$.

Пусть U, V – произвольные подмножества множества $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, и пусть $f : U \to \mathbf{Z}$, $g : V \to \mathbf{Z}$ – произвольные функции. Будем писать $f \equiv g$, если множество

$$\{(i, j) \in U \cap V : f(i, j) \neq g(i, j)\}$$

является конечным. Мардежич и Прасолов [127] доказали, что $\lim^1 A = 0$ тогда и только тогда, когда положителен ответ на следующий вопрос [127, Вопрос 5]:

Пусть $(f_n, n \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}})$ – семейство функций $f_n : U_n \to \mathbf{Z}$, где $U_n = \{(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : 0 \leq j \leq n(i)\}$. Если $f_n \equiv f_m$, для всех пар $n, m \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, то в любом ли случае существует функция $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, для которой $f \equiv f_n$ при всех $n \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$?

В [127] было установлено, что в предположении (CH) ответ на этот вопрос положителен. Следовательно, из (CH) следует $\lim^1 A \neq 0$. Дау, Саймон и Воган [79] показали, что (CH) в этом утверждении можно ослабить.

Дау, Саймон и Воган [79, Теорема 1.2] установили, что существуют модели ZFC, в которых $\lim^1 A = 0$.

С другой стороны, построена [27] такая проективная система F, что $\lim{}^1 F = 0$ в случае, если верно (CH) , и $\lim{}^1 F \neq 0$, если $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Приложения к условиям сходимости. Пусть задана точная пара

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ \uparrow k & & \downarrow j \\ E & = & E \end{array} \tag{1}$$

биградуированных абелевых групп и однородных гомоморфизмов, для которой i, j и k имеют бистепени $(-1,1)$, $(1,0)$ и $(0,0)$, соответственно. Тогда можно построить последовательность точных пар , при $r = 1, 2, \cdots$

$$\begin{array}{ccc} D_r & \xrightarrow{i_r} & D_r \\ \uparrow k_r & & \downarrow j_r \\ E_r & = & E_r \end{array} \tag{2}$$

с первым членом равным (1), где i_r, j_r и k_r имеют бистепени соответственно $(-1,1)$, $(r, -r+1)$ и $(0,0)$. Следуя [166] будем говорить, что (1) есть точная пара *предельного типа*, если для каждого n существуют такие r_0 и s_0, что $D_r^{s,n-s} = 0$ для всех $r \geq r_0$ и $s \leq s_0$. Если дана такая точная пара, то для любых s, t мы имеем при некотором r_0, что $D_r^{s-r,t+r-1} = 0$ для $r \geq r_0$ и, следовательно,

$$E_{r_0}^{s,t} \supset E_{r_0+1}^{s,t} \supset E_{r_0+2}^{s,t} \supset \cdots$$

Обозначим $\bigcap\limits_r E_r^{s,t}$ через $E_\infty^{s,t}$. В [166] спектральная последовательность $E_r^{s,t}$, порожденная точной парой (1), называется сходящейся к градуированной абелевой группе D_∞^n, если для каждого n существует такая последовательность эпиморфизмов

$$\cdots \to Q_s^n \to Q_{s-1}^n \to Q_{s-2}^n \to \cdots,$$

что $D_\infty^n = \lim\limits_{\leftarrow\, s\in\mathbf{N}} \{Q_s^n\}$ и $Ker(Q_s^n \to Q_{s-1}^n) \cong E_\infty^{s,n-s}$ для всех $s \in \mathbf{Z}$. Прасолов [166] доказал, что если (1) является точной парой предельного типа, состоящей из таких биградуированных абелевых групп, что проективные системы $\{E_r^{s,t}\}_{r\in\mathbf{N}}$ ацикличны для всех (s,t), то спектральная последовательность $\{E_r^{s,t}\}$ сходится к D_∞^n, где D_∞^n – обратный предел последовательности

$$\cdots \xrightarrow{i} D^{s,n-s} \xrightarrow{i} D^{s-1,n-s+1} \xrightarrow{i} \cdots$$

Используя этот результат, Прасолов доказал, что для каждой проективной системы комплексов абелевых групп $\{F(i)\}_{i\in I}$ существует спектральная последовательность правой полуплоскости с $E_2^{s,t} = \lim\limits_{\leftarrow\, I}{}^s \{H_{-t}F(i)\}$, сходящаяся, в смысле данного выше определения, к сильным гомологиям $\overline{H}_{-s-t}F$ Миминошвили [9]. Заметим, что для любых малой категории $\mathbb{C}$ и функтора $F : \mathbb{C} \to Chain$ в категорию цепных комплексов абелевых групп комплексы $R^{p,q} = C^p(\mathbb{C}, F_{-q})$ будут теми, которые рассматривались нами в разделе

1.1 для $F = F_{-q}$, а $\overline{H}_n F = H^{-n}(Tot_*(F))$ будут когомологиями тотального комплекса $\{Tot_n(F), d\} = \{\prod\limits_{p+q=n} R^{p,q}, \delta + d'\}$ коцепного бикомплекса

$$R^{p,q}F = \prod_{c_0 \to c_1 \to \dots \to c_p} F_{-q}(c_p), \quad R^{p,q} = 0 \;\; p < 0,$$

где $d'_{p,-q} = (-1)^p \partial_q$, а ∂_* – дифференциал комплекса F_*.

Теорема 1.11 *[166] Пусть $F : \mathbb{C} \to Chain$ – функтор. Тогда существует спектральная последовательность типа $E_2^{s,t} = \lim{}^s_{\mathbb{C}}\{H_{-t}(F(c))\}$, сходящаяся в смысле данного выше определения, если $\lim\limits_{\leftarrow\, r}{}^1 \{E_r^{s,t}\} = 0$ для всех s, t.*

Если либо существует такой s_0, что $\lim{}^s_{\mathbb{C}}\{H_{-t}(F(c))\} = 0$ для всех $s \geq s_0$, либо существует n_0, при котором $H_n(F(c)) = 0$ для всех $n \geq n_0$ и $c \in Ob\,\mathbb{C}$, то эта спектральная последовательность сходится в обычном смысле к $\overline{H}_{-s-t}F$, то есть $\overline{H}_{-s-t}F$ допускают конечную фильтрацию, последовательные фактор-группы которой изоморфны $E_\infty^{s,t}$.

Дальнейшая информация о сильных гомологиях и их приложениях содержится в обзоре Скляренко [20].

1.3 Элементы первой группы когомологий

Для произвольного функтора $F : \mathbb{C} \to Ab$ на малой категории Хофф [98] интерпретирует элементы из $\lim{}^1_{\mathbb{C}} F$ как классы скрещенных гомоморфизмов. Голашинский [91] и Форд [86] дали другую интерпретацию.

Запись $\mathbb{C}^+$ означает, что композиция в $\mathbb{C}$ обозначается через '+'.

Скрещенные гомоморфизмы. *Скрещенным произведением* F *и* $\mathbb{C}$ называется множество

$$(F \times_\chi \mathbb{C})^+ = \coprod_{(a,b) \in Ob\,\mathbb{C} \times Ob\,\mathbb{C}} F(b) \times \mathbb{C}(a, b)$$

с законом композиции, заданном как $(z', f') + (z, f) = (z' + F(f')z, f' \circ f)$, для f' и f, для которых композиция $f' \circ f$ определена.

Сумма групп $\coprod_{c \in Ob\,\mathbb{C}} F(c)$ в категории группоидов является подкатегорией скрещенного произведения. *Скрещенным гомоморфизмом из* $\mathbb{C}$ *в* F называется элемент $\psi \in \prod_{f \in Mor\,\mathbb{C}} F(\mathrm{cod}\,(f)) = C^1(\mathbb{C}, F)$, для которого $d^1\psi = 0$. *Главным скрещенным гомоморфизмом* называется произвольный $\psi \in Imd^0$. Скрещенные гомоморфизмы – это в точности те функции $\psi : Mor\,\mathbb{C} \to \coprod_{c \in Ob\,\mathbb{C}} F(c)$, для которых $\psi(f) \in F(\mathrm{cod}\,(f))$ и

$$\psi(f' \circ f) = \psi(f') + F(f')(\psi(f)), \qquad f' \circ f \quad .$$

Они будут *главными*, если существуют такие $\tau \in C^0(\mathbb{C}, F)$, что

$$\psi(f) = \tau(\mathrm{cod}\,(f)) - F(f)\tau(\mathrm{dom}\,(f)) \quad \forall f \in Mor\,\mathbb{C}.$$

Пусть $B^1(\mathbb{C}, F)$ – подгруппа элементов группы $Z^1(\mathbb{C}, F)$ скрещенных гомоморфизмов, состоящая из главных.

Элементы группы $\lim{}^1_{\mathbb{C}} F$ можно рассматривать как классы скрещенных гомоморфизмов по модулю главных скрещенных гомоморфизмов, ибо

$$\lim{}^1_{\mathbb{C}} F \cong Z^1(\mathbb{C}, F)/B^1(\mathbb{C}, F).$$

Внутренним автоморфизмом скрещенного произведения $(F \times_\chi \mathbb{C})^+$ *определенным с помощью* $\tau \in C^0(\mathbb{C}, F)$ называется функтор из скрещенного произведения в себя, действующий по формуле

$$(z, f) \mapsto (\tau(\mathrm{cod}\,(f)) + z - F(f)(\tau(\mathrm{dom}\,(f)), f).$$

Предложение 1.12 [98] *Группа всех обратимых функторов скрещенного произведения в себя, индуцирующих тождественные функторы на подкатегории* $\coprod_{c \in Ob\,\mathbb{C}} F(c)$ *и категории* $\mathbb{C}$*, изоморфна группе* $Z^1(\mathbb{C}, F)$ *скрещенных гомоморфизмов. Относительно этого изоморфизма внутренние автоморфизмы скрещенного произведения* $(F \times_\chi \mathbb{C})^+$*, определенные с помощью* $\tau \in C^0(\mathbb{C}, F)$*, соответствуют главным гомоморфизмам.*

Дифференцирования. В [86] и [91] *дифференцирование* определяется как элемент из $Z^1(\mathbb{C}, F)$. Элементы из $B^1(\mathbb{C}, F)$ называются *внутренними дифференцированиями.* Обозначим через Lh^c композицию функторов $L : Ens \to Ab$ и h^c. Пусть $J(\mathbb{C})$ задана с помощью точной последовательности $0 \to J(\mathbb{C}) \to \sum_{c \in Ob\,\mathbb{C}} Lh^c \to \Delta_{\mathbb{C}} \mathbf{Z} \to 0$. Тогда существует естественный изоморфизм

$$Ab^{\mathbb{C}}(J(\mathbb{C}), F) \cong Der(\mathbb{C}, F),$$

для $n \geq 1$. Это приводит к естественным изоморфизмам

$$\lim{}^{n+1}_{\mathbb{C}} F \cong R^n(Der(\mathbb{C}, F)),$$

где $R^n Der(\mathbb{C}, -)$ — n-е правые производные от функтора $Der(\mathbb{C}, -)$.

1.4 Категории когомологической размерности 0

Функтор предела $\lim_{\mathbb{C}} : Mod_R^{\mathbb{C}} \to Mod_R$ всегда точен слева. Возникает естественный вопрос, когда он точен? Этот вопрос приводит к проблеме характеризации малых категорий $\mathbb{C}$ когомологической размерности $\mathrm{c.d.}\,\mathbb{C} = 0$.

Гипотеза Оберста. Категория называется имеющей *правый нуль*, если существует эндоморфизм ε некоторого объекта, обладающего морфизмами во все другие объекты, удовлетворяющий равенствам $\alpha \circ \varepsilon = \beta \circ \varepsilon$, для которых обе части имеют смысл. В случае $R = \mathbf{Z}$ Оберст предположил, что $\mathrm{c.d.}\,\mathbb{C} = 0$ тогда и только тогда, когда каждая компонента связности категории $\mathbb{C}$ имеет правый нуль [146].

Эта гипотеза была доказана Лаудалом [123]:

Теорема 1.13 [123] *Функтор предела $Ab^{\mathbb{C}} \to Ab$ точен, если и только если все компонеты связности $\mathbb{C}$ имеют правые нули.*

Категории R-когомологической размерности нуль. Для каждого кольца R с 1 справедливо неравенство $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} \leq \mathrm{c.d.}\,\mathbb{C}$. Отсюда вытекает, что Лаудал охарактеризовал малые категории, удовлетворяющие $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} = 0$ для всех колец R с 1. Ченг получил более полную информацию о категориях, обладающих свойством $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} = 0$:

Определение 1.6 [63] *$\mathbb{C}$–множеством называется произвольный функтор $\mathbb{C} \to Ens$. $\mathbb{C}$–множество называется разложимым, если оно является дизъюнктным объединением двух $\mathbb{C}$–множеств. В противном случае оно называется неразложимым.*

Функтор $RA : \mathbb{C} \to Mod_R$ определяется, как равный на $p \in Ob\,\mathbb{C}$ свободным R–модулям $RA(p)$, порожденным множествами $A(p)$, с очевидным продолжением отображений множеств до гомоморфизмов.

Обозначим через $h^* : \mathbb{C}^{op} \to Ens^{\mathbb{C}}$ вложение Ионеды. Каждое $\mathbb{C}$–множество A является дизъюнктным объединением неразложимых $\mathbb{C}$–множеств A_i. Категории h^*/A будут иметь компоненты h^*/A_i, а RA будет прямой суммой функторов RA_i. Обозначим $\alpha\,E = \{\alpha \circ \varepsilon : \varepsilon \in E\}$.

Теорема 1.14 *Пусть A – такое неразложимое $\mathbb{C}$–множество, что отображения $A(\alpha)$ инъективны для всех α из $\mathbb{C}$. Тогда RA проективен, если и только если существует объект e из $(h^*/A)^{op}$, который обладает морфизмами во все объекты и такой, что категория $(h^*/A)^{op}(e,e)$ содержит конечное подмножество E со свойствами:*

(a) $\alpha E = \beta E$ для всех морфизмов α, β, для которых равенство имеет смысл (то есть имеющих одинаковую область определения e и общую кообласть).

(b) Порядок множества E обратим в R.

Теорема 1.15 *Пусть $\mathbb{C}$ – связная малая категория, R – кольцо с 1. Тогда $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} = 0$, если и только если существует такой объект $e \in Ob\,\mathbb{C}$, обладающий морфизмами во все объекты, что $\mathbb{C}(e,e)$ содержит конечное подмножество E со свойствами:*

(a) $\alpha E = \beta E$, как только равенство имеет смысл;

(b) Порядок E обратим в R.

Здесь αE обозначает множество $\{\alpha \circ \varepsilon : \varepsilon \in E\}$.

Следствие 1.16 [66] *Предположим, что A – неразложимое $\mathbb{C}$–множество, такое что отображения $A(\alpha)$ инъективны для всех α. Тогда $\mathbf{Z}A$ проективен, если и только если $(h^*/A)^{op}$ имеет правый нуль.*

Моноиды гомологической размерности нуль.

Следствие 1.17 *Пусть M – моноид. Тогда* $\mathrm{c.d.}_R M = 0$*, если и только если в нем существует такое конечное подмножество E, что:*

(a) $mE = E$ для всех $m \in M$,

(b) Порядок E обратим в R.

Значит, если G – группа, то $\mathrm{c.d.}_R G = 0$ тогда и только тогда, когда G имеет конечный порядок, и этот порядок является обратимым в R.

Групповой рефлектор $\hat{M}$ моноида M определяется как значение на M функтора, сопряженного слева к вложению категории групп в категорию моноидов. С помощью Следствия 1.17 получаем:

Следствие 1.18 [69] *Пусть M – конечно-порожденный абелев моноид. Тогда* $\mathrm{c.d.}_R M = 0$*, если и только если* $\mathrm{c.d.}_R \hat{M} = 0$.

1.5 Расширения категории

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, $F : \mathbb{C} \to Ab$ – функтор. Хофф [98] и Митчел [142] установили, что элементы из $\lim^2_{\mathbb{C}} F$ можно рассматривать как классы расширений $\mathbb{C}$ с помощью функтора $F : \mathbb{C} \to Ab$. Датуашвили [1] и Голашинский [91] обобщили их построения на элементы из $\lim^n F$.

Расширение функторов с помощью категории. *Расширением категорий* называется последовательность функторов

$$H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}$$

таких, что $\mathbb{C}$ – фактор-категория категории E, i – инъекция, π – проекция, в частности, π – полный функтор, и π биективен на объектах.

Более того, мы требуем для любых $f \in MorE$, $g \in MorE$ равносильность выполнения равенства $\pi(f) = \pi(g)$ существованию такого морфизма $z \in MorE$, что $g = i(z) + f$. (Композиция в E обозначается через "+"и каждый объект $e \in ObE$ отождествляется с $\pi(e) \in Ob\mathbb{C}$.)

Пусть $F : \mathbb{C} \to Ab$ – функтор. *Расширением F с помощью* $\mathbb{C}$ называется расширение категорий

$$\coprod_{c \in Ob\,\mathbb{C}} F(c) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} \mathbb{C},$$

такое, что $i(F(\pi(b))) \subseteq Aut(b)$ для каждого $b \in ObE$.

Два расширения $\coprod_{c\in Ob\,\mathbb{C}} F(c) \stackrel{i}{\to} E \stackrel{\pi}{\to} \mathbb{C}$ и $\coprod_{c\in Ob\,\mathbb{C}} F(c) \stackrel{i'}{\to} E' \stackrel{\pi'}{\to} \mathbb{C}$ называются *конгруэнтными*, если существует такой функтор $\mu : E \to E'$, что коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{c\in Ob\,\mathbb{C}} F(c) & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C} \\
\downarrow = & & \downarrow \mu & & \downarrow = \\
\coprod_{c\in Ob\,\mathbb{C}} F(c) & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{C},
\end{array}$$

Пусть $Opext^1(\mathbb{C}, F)$ будет множеством всех классов конгруэнтности расширений F с помощью $\mathbb{C}$. Хофф доказал, что существует взаимно однозначное естественное отображение $w^1 : Opext(\mathbb{C}, F) \to \lim{}^2_{\mathbb{C}} F$.

В [99] понятие расширения было обобщено для интерпретации неабелевых когомологий, коэффициенты при этом обобщении могут быть не функториальными.

Расслоения. Митчел [142] ввел понятие *расслоения.* Функтор $\pi : E \to \mathbb{C}$ называется *расслоением на группоиды*, если выполненны следующие два условия.

(a) Для любых объектов $y \in ObE$, $b \in Ob\,\mathbb{C}$ и для каждого морфизма $\beta : b \to \pi(y)$ существуют такие объект $x \in ObE$ и морфизм $\alpha : x \to y$, что $\pi(\alpha) = \beta$.

(b) Для любых объектов x, y, z и морфизмов $\alpha_1 : x \to z$, $\alpha_2 : y \to z$ категории E, и для всякого морфизма $\beta : \pi(x) \to \pi(y)$ из $\mathbb{C}$, удовлетворяющего условию $\pi(\alpha_2) \circ \beta = \pi(\alpha_1)$, существует такой единственный морфизм $\alpha : x \to y$, что $\pi(\alpha) = \beta$.

Для произвольного $c \in Ob\,\mathbb{C}$ морфизмы $\alpha \in \pi^{-1}(1_c)$ составляют подкатегорию из E, называющуюся слоем над c. Каждый слой является группоидом. Если слои $G_c = \pi^{-1}(1_c)$ для всех $c \in Ob\,\mathbb{C}$ являются группами, то π будет называться *расслоением на группы* G_c.

Пусть $\pi : E \to \mathbb{C}$ – расслоение на группы G_c, $c \in Ob\,\mathbb{C}$. Тогда π – биекция на объектах, и мы будем отождествлять объекты из $\mathbb{C}$ и E с помощью π. Легко видеть, что E имеет следующие свойства:

(a) Для любых $\alpha \in E(a, b)$ и $g \in G_b$ верны равенства $g\alpha = \alpha g'$, при некоторых $g' \in G_a$.

(b) Если $\alpha \in E(a, b)$ и $\alpha g = \alpha g'$, при некотором $g' \in G_a$, то $g = g'$.

Имеем $\pi(\alpha) = \pi(\alpha')$ в случае, когда для некоторого $g \in G_a$ верно равенство $\alpha' = \alpha g$. Поскольку π является полным функтором, он может быть отождествлен с естественным функтором категории E на фактор-категорию.

Пусть, наоборот, задана категория E, снабженная подгруппами $G_a \subseteq Aut(a)$, удовлетворяющими для всех $a \in ObE$ условиям (a) и (b). Положим $\alpha \sim \alpha'$ для любых параллельных морфизмов, допускающих равенства $\alpha' = \alpha g$ для некоторых $g \in G_a$. Из условия (a) и свойства G_a быть группами следует, что $\sim$ является отношением конгруэнтности на E. Обозначим через $\mathbb{C}$ фактор-категорию $E/\sim$. Из (b) вытекает, что естественный функтор $\pi : E \to \mathbb{C}$ является расслоением, слоями которого служат группы G_a.

Рассмотрим расслоение $\pi : E \to \mathbb{C}$ на группы G_a. Обозначим элемент g' из условия (a), единственный согласно (b), через $G(\alpha)(g)$. Тогда $G(\alpha) : G_b \to G_a$ – гомоморфизм групп, и верно

$$G(\alpha'\alpha) = G(\alpha)G(\alpha'), \quad G(1_a) = 1_{G_a}.$$

Иными словами, $G : E^{op} \to Grp$ будет функтором в категорию групп. Для каждого $x \in Mor\,\mathbb{C}$ обозначим через γ_x морфизм категории E, для которого

$\pi(\gamma_x) = x$. Семейство γ называется *подходящим* для π. Если существует такое подходящее семейство γ, что $\gamma : \mathbb{C} \to E$ является функтором, то π называется *расщепляемым* расслоением.

Даже в случае, когда семейство γ не составляет функтор, композиция

$$\mathbb{C}^{op} \xrightarrow{\gamma} E^{op} \xrightarrow{G} Grp \tag{3}$$

может быть функтором. Сделаем наблюдение, что если $g \in G_b$, $h \in G_a$ и $\alpha \in E(a,b)$, то $g\alpha h = \alpha g' h = \alpha h h^{-1} g' h$, и значит $G(\alpha h)(g) = h^{-1}G(\alpha)(g)h$. Если G_a – абелевы, то композиция (3) – функтор и не зависит от подходящего семейства γ.

Рассмотрим теперь малую категорию $\mathbb{C}$ и функтор $F : \mathbb{C}^{op} \to Ab$. Расслоение $\pi : E \to \mathbb{C}$ на абелевы группы, для которого композиция (3) равна заданному функтору F, будет называться *расслоением над* $\mathbb{C}$ *с помощью* F. Два таких расслоения $\pi : E \to \mathbb{C}$ и $\pi' : E' \to \mathbb{C}$ будут называться *эквивалентными*, если существует функтор $T : E \to E'$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{c \in Ob\,\mathbb{C}} F(c) \subseteq & E & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C} \\
\downarrow = & \downarrow T & & \downarrow = \\
\coprod_{c \in Ob\,\mathbb{C}} F(c) \subseteq & E' & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{C}.
\end{array}$$

Такой функтор T должен быть изоморфизмом. Таким образом, это отношение будет отношением эквивалентности на расслоениях над $\mathbb{C}$ с помощью F.

Теорема 1.19 [142] *Пусть* $\mathbb{C}$ *– малая категория,* $F : \mathbb{C} \to Ab$ *– функтор. Тогда существует взаимнооднозначное соответствие между классами эквивалентности расслоений над* $\mathbb{C}$ *с помощью* F *и элементами группы когомологий* $H^2(\mathbb{C}^{op}, F)$.

Открытая проблема 1.7 [142] *Если все расслоения над категорией* $\mathbb{C}$ *на абелевы группы расщепляемы, то будут ли все расслоения над* $\mathbb{C}$ *на не обязательно коммутативные группы расщепляемы? Верно ли это хотя бы в случае, когда* $\mathbb{C}$ *– ч. у. множество?*

Операции над расширениями. В [91] Голашинский обобщил конструкцию Хоффа. Пусть $\mathbb{C}$ – категория, $F : \mathbb{C} \to Ab$ – функтор. Обозначим через $F^+ = \coprod_{c \in Ob\,\mathbb{C}} F(c)$ группоид, полученный как дизъюнктное объединение групп $F(c)$. Для расширения $\mathcal{E} : F^+ \to E \to \mathbb{C}$ и естественного преобразования $\varphi : F \to F'$ кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}
F^+ & \xrightarrow{\alpha} & E \\
\downarrow \varphi^+ & & \downarrow \gamma \\
F'^+ & \xrightarrow{\alpha'} & E'
\end{array}$$

дает расширение $\mathcal{E}' : F'^{+} \xrightarrow{\alpha'} E' \xrightarrow{\beta'} \mathbb{C}$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} F^+ & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C} \\ \downarrow \varphi^+ & & \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbb{C}} \\ F'^+ & \xrightarrow{\alpha'} & E' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbb{C} \end{array}$$

Положим $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \circ \varphi$ и назовем его композицией $\mathcal{E}$ и φ.

Двойственно, для расширения $\mathcal{E} : F^+ \to E \to \mathbb{C}$ и функтора $\delta : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbb{C}' \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ E & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C} \end{array}$$

дает расширение $\mathcal{E}' : (F\gamma)^+ \to \mathcal{E}' \to \mathbb{C}'$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} (F\gamma)^+ & \xrightarrow{\alpha'} & E' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbb{C}' \\ \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ F^+ & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C} \end{array}$$

Положим $\mathcal{E}' = \gamma\,\mathcal{E}$ и назовем его композицией γ и $\mathcal{E}$.

Превратим $Opext^1(\mathbb{C}, F)$ в абелеву группу относительно определенной следующим образом *суммы Бэра*:

Пусть $\Delta_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ будет функтор диагонали, $\nabla_F : ((F \times F)\Delta_{\mathbb{C}})^+ \to F^+$ – кодиагональный морфизм для F, заданный с помощью сложения $(\nabla_F)_c : F(c) \times F(c) \xrightarrow{+} F(c)$, при каждом $c \in Ob\mathbb{C}$. Для заданных двух расширений $\mathcal{E} : F^+ \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}$ и $\mathcal{E}' : F^+ \xrightarrow{\alpha'} E' \xrightarrow{\beta'} \mathbb{C}'$ определим их произведение как расширение $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' : (F \times F)^+ \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} E \times E' \xrightarrow{\beta \times \beta'} \mathbb{C}'$.

Предложение 1.20 *[91, Предложение 1.1] Множество $Opext^1(\mathbb{C}, F)$ является абелевой группой относительно операции, сопоставляющей классам конгруэнтности расширений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ класс конгруэнтности расширения $\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \nabla_F((\mathcal{E} \times \mathcal{E}')\Delta_{\mathbb{C}})$*

Нулевым элементом в $Opext^1(\mathbb{C}, F)$ будет класс конгруэнтности расширения $F^+ \to F \times_\chi \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где $F \times_\chi \mathbb{C}$ – скрещенное произведение F и $\mathbb{C}$.

Теорема 1.21 [91] *Существует естественный по F изоморфизм*

$$w^1 : Opext^1(\mathbb{C}, F) \xrightarrow{\cong} H^2(\mathbb{C}, F).$$

Голашинский [91] определяет n–кратное расширение F с помощью $\mathbb{C}$ как последовательность категорий и функторов

$$\mathcal{E} : \quad F^+ \xrightarrow{\alpha_0} F_1^+ \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \to F_{n-1}^+ \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathbb{C},$$

где $F, F_1, \cdots, F_{n-1}$ – функторы $\mathbb{C} \to Ab$, а F_n – категория, для которых существуют такие расширения

$$\mathcal{E}_0 : F^+ \stackrel{\alpha_0}{\to} F_1^+ \stackrel{\beta_1}{\to} G_1,$$

$$\mathcal{E}_i : F_i^+ \stackrel{\gamma_i}{\to} F_{i+1}^+ \stackrel{\beta_{i+1}}{\to} G_{i+1},\ for\ i = 1, 2, \cdots, n-2,$$

$$\mathcal{E}_{n-1} : F_{n-1} \stackrel{\gamma_{n-1}}{\to} F_n \stackrel{\beta_n}{\to} \mathbb{C}$$

что $\gamma_i \circ \beta_i = \alpha_i$ при $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Мы записываем $\mathcal{E}$ как *композицию* n расширений $\mathcal{E}_i$, в виде $E = E_0 \circ E_1 \circ \cdots \circ E_{n-1}$. Любой морфизм двух таких n–кратных расширений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ задается как последовательность функторов $(id_{F^+}, \gamma_1^+, \cdots, \gamma_{n-1}^+, \gamma_n, id_{\mathbb{C}})$, для которой коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
F^+ & \stackrel{\alpha_0}{\longrightarrow} & F_1^+ & \stackrel{\alpha_1}{\longrightarrow} & \cdots & \longrightarrow & F_{n-1}^+ & \stackrel{\alpha_{n-1}}{\longrightarrow} & F_n & \stackrel{\alpha_n}{\longrightarrow} & \mathbb{C} \\
\downarrow 1_{F^+} & & \downarrow \gamma_1^+ & & & & \downarrow \gamma_{n-1}^+ & & \downarrow \gamma_n^+ & & \downarrow 1_{\mathbb{C}} \\
F^+ & \stackrel{\alpha_0'}{\longrightarrow} & F_1'^+ & \stackrel{\alpha_1'}{\longrightarrow} & \cdots & \longrightarrow & F_{n-1}'^+ & \stackrel{\alpha_{n-1}'}{\longrightarrow} & F_n' & \stackrel{\alpha_n'}{\longrightarrow} & \mathbb{C}
\end{array}$$

Расширение $\mathcal{E}$ называется *конгруэнтным* $\mathcal{E}'$, если существует такая последовательность расширений $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n$, что $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}'$, причем для каждого $0 < i \leq n$ существует морфизм либо из $\mathcal{E}_{i-1}$ в $\mathcal{E}_i$, либо из $\mathcal{E}_i$ в $\mathcal{E}_{i-1}$.

Пусть $Opext^n(\mathbb{C}, F)$ – множество всех классов конгруэнтности n–кратных расширений F с помощью $\mathbb{C}$. Определим *композицию* n–кратных расширений F с помощью $\mathbb{C}$ с "компонируемыми"морфизмами, точнее, для $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \circ \mathcal{E}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{n-1}$ мы определим $\mathcal{E}\varphi$, как только $\varphi : F \to F'$ есть естественное преобразование, и $\gamma\mathcal{E}$, как только $\gamma : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ есть функтор, по формулам

$$\gamma\mathcal{E} = (\gamma\mathcal{E}_0) \circ \mathcal{E}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{n-1},$$

$$\mathcal{E}\varphi = \mathcal{E}_0 \circ \mathcal{E}_1 \circ \cdots \circ (\mathcal{E}_{n-1}\varphi).$$

Сумма Бэра определяется для $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ по обычной формуле $\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \nabla_F(\mathcal{E} \times \mathcal{E}')\Delta_{\mathbb{C}}$. Голашинский доказал, что сумма Бэра превращает $Opext^n(\mathbb{C}, F)$ в абелеву группу, и что семейство $Opext^n$ является связанной последовательностью функторов. Более того, он получил следующий результат:

Теорема 1.22 *Существует изоморфизм*

$$w = \{w^n : Opext^n(\mathbb{C}, -) \to \lim{}^{n+1}_{\mathbb{C}}(-),\ n \geq 1\}$$

связанной последовательности функторов.

1.6 Категории когомологической размерности 1

Малая категория называется *категорией с сокращениями*, если каждый ее морфизм является мономорфизмом и эпиморфизмом. Таким образом, $\mathbb{C}$ будет категорией с сокращениями, если и только если $\alpha \circ x \circ \beta = \alpha \circ y \circ \beta \Rightarrow x = y$

для всех $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{C}$. Пусть Γ – (ориентированный) граф, $W\Gamma$ – категория путей в Γ. Обозначим через Γ^1 множество всех стрелок из Γ. Если категория $\mathbb{C}$ изоморфна категории частных категории $W\Gamma$, полученной обращением элементов некоторого подмножества $\Sigma \subseteq \Gamma^1$, то $\mathbb{C}$ называется *частично свободной*, или *категорией мостов*. Митчел доказал, что всякая частично свободная категория имеет когомологическую размерность ≤ 1.

Моноиды когомологической размерности 1. Каждый моноид будет рассматриваться как малая категория с одним объектом. Столлингс [177] и Суон [179] доказали, что все группы когомологической размерности 1 свободны. Митчел [133] показал, что это неверно в случае коммутативных моноидов.

Гипотеза 1.8 *[133] Пусть $\mathbb{C}$ – моноид с сокращениями. Тогда* $\mathrm{c.d.}\,\mathbb{C} \leq 1$, *если и только если $\mathbb{C}$ частично свободен.*

Эта гипотеза была опровергнута Б. В. Новиковым, построившим контрпримеры в [143]. Новиков доказал, что все подмоноиды аддитивной группы целых чисел $\mathbf{Z}$ имеют когомологическую размерность ≤ 1 [12]. Подмоноид в $\mathbf{N}$ свободен, если и только если он изоморфен $\mathbf{N}$, стало быть существуют не свободные коммутативные моноиды с сокращениями когомологической размерности 1. Для любой полугруппы S, не содержащей единицы, определим c.d.S как c.d.$(S \cup \{1\})$. Новиков [12] доказал, что все коммутативные полугруппы с сокращениями когомологической размерности 1 изоморфны либо $\mathbf{Z}$, либо подполугруппе из $\mathbf{N}$. Мы обязаны упомянуть здесь работу [69], ибо она содержит это утверждение как следствие.

Используя свои результаты из [13], Новиков доказал в [144] слабую гипотезу Митчела о том, что полугруппа с сокращениями когомологической размерности 1 допускает вложение в свободную группу.

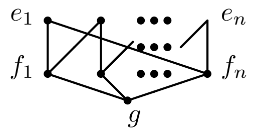
Рекомендуем обзор Новикова [15] для получения более полной информации о когомологиях моноидов.

Категории с условием обрыва убывающих цепей и частично упорядоченные множества когомологической размерности 1. Ченг [61] охарактеризовал конечные ч. у. множества $\mathbb{C}$, для которых $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} \leq 1$. Напомним, что *высотой* элемента x конечного ч. у. множества называется наибольшее целое число n, для которого существует цепочка строгих неравенств $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$. Если $x, y \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию $]x, y[= \emptyset$, то мы будем говорить, что y является *покрытием* для x, а x – *копокрытием* для y. Будем называть элемент из $\mathbb{C}$ *лишним*, если он или имеет высоту 0 (минимален) и только одно покрытие, или он имеет высоту 1 и только одно копокрытие. Повторяя насколько возможно процесс удаления лишнего элемента, мы получим конечное ч. у. множество, обозначаемое через $E(\mathbb{C})$.

Для каждого $a \in \mathbb{C}$ рассмотрим ч. у. множество $\mathbb{C}_a = \{x \in \mathbb{C} : x \leq a\}$. Через $\mathbb{C} = pt$ обозначается ч. у. множество, состоящее из единственного элемента.

Теорема 1.23 *[61, Теорема 1.8] Пусть R – кольцо с 1, $\mathbb{C}$ – ч. у. множество, у которого $\mathbb{C}_a$ конечны для всех $a \in \mathbb{C}$. Тогда* $\mathrm{c.d.}_R \mathbb{C} \leq 1$*, если и только если $E(\mathbb{C}_a) = pt$ для всех $a \in \mathbb{C}$.*

Под *n–короной* $\mathbf{C_n}$, при $n \geq 2$, мы понимаем ч. у. множество, состоящее из $2n+1$ элементов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n, g\}$, упорядоченное с помощью $e_i < f_i < g$ при $1 \leq i \leq n$, $e_i < f_{i-1}$ при $2 \leq i \leq n$ и $e_1 < f_n$.



n–корона $\mathbf{C_n}$

Категорией с *условием убывающих цепей* (DCC) называется категория, в которой для каждой последовательности морфизмов $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$, удовлетворяющей равенствам $\mathrm{dom}\,(\alpha_i) = \mathrm{cod}\,(\alpha_{i+1})$ для всех i, обязательно существует такой k, что $\alpha_i = 1$ для всех $i > k$. Ясно, что всякая DCC категория является дельтой. DCC категории когомологической размерности 1 были охарактеризованы Ченгом в [65].

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория. Под *(сингулярной) n–короной* $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ в категории $\mathbb{C}$ будет пониматься диаграмма $C_n : \mathbf{C_n} \to \mathbb{C}$, имеющая свойства

$$x_i = C_n(f_i < g), y_i = C_n(e_i < f_i), \quad i = 1, \cdots, n,\; z_1 = C_n(e_2 < f_1),$$

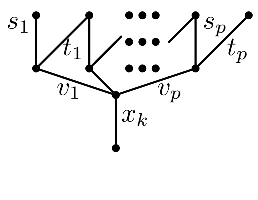
$$z_2 = C_n(e_3 < f_2), \ldots,\; z_{n-1} = C_n(e_n < f_{n-1}),\; z_n = C_n(e_1 < f_n).$$

Диаграмма в $\mathbb{C}$ вида

$$\bullet \overset{y}{\underset{z}{\rightrightarrows}} \bullet \xrightarrow{x} \bullet\;,$$

где $x\,y = x\,z$ и $y \neq z$, называется 1-короной.

Будем называть 1-корону C_1 в $\mathbb{C}$ *поддержанной в* $\mathbb{C}$, если существует такая n–корона $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ в $\mathbb{C}$, что $y = x_1\,y_1$, $z = x_n\,y_n$, где все $x_i \neq 1$. Определим n–корону $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ в $\mathbb{C}$ как *поддержанную между* y_k и z_k, если существует коммутативная диаграмма в $\mathbb{C}$



удовлетворяющая равенствам $y_k = v_1\, s_1$ и $v_p\, t_p = z_k$, и такая, что для каждого i из интервала $1 \le i \le p$ существуют $j \ne k$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow v_i & & \downarrow x_j \\ \bullet & \xrightarrow{x_k} & \bullet \end{array}$$

Если C_n поддержана в $\mathbb{C}$ между y_k и z_k для всех k, то C_n называется *поддержанной в* $\mathbb{C}$.

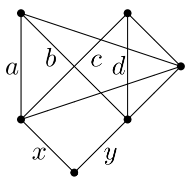
Теорема 1.24 *[65] Пусть* $\mathbb{C}$ *– DCC категория,* R *– кольцо с 1. Тогда* $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} \le 1$*, если и только если каждая* n*–корона, содержащаяся в* $\mathbb{C}$*,* $n \ge 1$*, поддержана в* $\mathbb{C}$*.*

Как непосредственное следствие получаем результат, доказанный Ченгом:

Теорема 1.25 *[67] Пусть* $\mathbb{C}$ *– ч. у. множество с условием обрыва убывающих цепей, а* R *– произвольное кольцо с 1. Тогда* $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} \ge 2$*, если и только если* $\mathbb{C}$ *содержит* $\mathbf{C}_n$ *для некоторого* $n \ge 2$ *как ретракт в категории ч. у. множеств и монотонных отображений.*

Условие обрыва убывающих цепей не может быть удалено, ибо существуют линейно упорядоченные множества произвольной когомологической размерности [137], тогда как линейно упорядоченное множество не может содержать $\mathbf{C}_n$ как ретракт.

Чтобы показать, что Теорема 1.25 не верна в общем случае, когда $\mathbb{C}$ не является ч. у. множеством, Ченг [65] рассмотрел категорию $\mathbb{D}$, заданную графом



с соотношениями $x\,a = y\,b$ и $x\,c = y\,d$. Категория $\mathbb{D}$ содержит 2-корону (x, y, a, d, c, b), не поддержанную в $\mathbb{D}$, значит, $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{D} \ge 2$. Но $\mathbb{D}$ не содержит никакую 2-корону в качестве ретракта.

Каждое подмножество S ч. у. множества мы рассматриваем как полную подкатегорию с множеством объектов S.

Пусть $\mathbb{C}$ – ч. у. множество, обозначим $\check{\mathbb{C}}$ ч. у. множество, полученное из $\mathbb{C}$ добавлением двух несравнимых элементов a и b, с соотношениями $a < c$ и $b < c$ для всех $c \in \mathbb{C}$. Если $\mathbb{C}$ – произвольное ч. у. множество, то мы определим его *хвост* как такое подмножество M, что M^{op} есть максимальное направленное подмножество в $\mathbb{C}^{op}$. Если M – хвост $\mathbb{C}$, то M' будет обозначать подмножество из M, состоящее из элементов, не содержащихся в других хвостах. Если M' не пусто, то M'^{op} будет конфинальным подмножеством в M^{op}. В общем случае M' может быть пустым, но не в предположении, что каждый элемент из $\mathbb{C}$ содержится лишь в конечном числе хвостов [68, Лемма 12]. В этом предположении, пусть M_i – хвосты $\mathbb{C}$, $i \in I$, и пусть $\hat{\mathbb{C}}$ – дизъюнктное объединение

$$\hat{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} - \cup_{i\in I} M'_i) \cup \{e_i : i \in I\},$$

где отношение порядка на первом члене суть ограничение отношения порядка $\mathbb{C}$, и все отношения, в которых участвуют e_i, имеют вид $e_i < p$, где $p \in M_i - M'_i$. Таким образом, для каждого $x \in \hat{\mathbb{C}}$ существует такой $i \in I$, что $e_i \leq x$, причем все e_i являются минимальными элементами. Ченг и Митчел получили следующий результат:

Теорема 1.26 *Пусть* $\mathbb{C}$ – *ч. у. множество, в котором каждый элемент содержится не более, чем в конечном числе хвостов. Тогда* $\mathrm{c.d.}_R\,\mathbb{C} \leq 1$, *если и только если* M^{op} *имеет счетное конфинальное подмножество в каждом хвосте* M, *и* $\hat{\mathbb{C}}$ *не содержит ни* $\mathbf{C_n}$, *ни* $\check{\gamma}^{op}$ *как ретракт, где* $2 \leq n < \infty$, *а* γ – *предельный ординал.*

Размерность категории частных. Из результата Ченга, Ву и Митчела [73] вытекает, что если $\mathbb{C}$ – малая категория и $\Sigma \subseteq Mor\,\mathbb{C}$ – произвольное подмножество, то для любого коммутативного кольца K с 1 естественное отображение $\lim^2_{\Sigma^{-1}\mathbb{C}} F \to \lim^2_{\mathbb{C}} F$ является мономорфизмом для всякого функтора $F : \Sigma^{-1}\mathbb{C} \to Mod_K$. Это обобщает результат Баррата [42], у которого $\mathbb{C}$ – был моноидом, а Σ – множеством всех его элементов.

Следствие 1.27 *Пусть* $\mathbb{C}$ – *малая категория,* K – *коммутативное кольцо с 1. Если* $\mathrm{c.d.}_K\,\mathbb{C} \leq 1$, *то для всякого* $\Sigma \subseteq Mor\,\mathbb{C}$ *верно неравенство* $\mathrm{c.d.}_K \Sigma^{-1}\mathbb{C} \leq 1$.

1.7 Когомологическая размерность конструкций

Копределы категорий. Пусть I – ч. у. множество, $\{\mathbb{C}_i\}_{i\in I}$ – семейство таких малых категорий, что $\mathbb{C}_i \subseteq \mathbb{C}_j$ для всех $i \leq j$. Семейство категорий $\{\mathbb{C}_i\}_{i\in I}$ называется *локально направленным покрытием категории* $\mathbb{C}$, если для каждого $n \in \mathbf{N}$ оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) $N_n\,\mathbb{C} = \bigcup\limits_{i\in I} N_n\,\mathbb{C}_i$;

(2) для каждого $\sigma \in N_n\,\mathbb{C}_i \cap N_n\,\mathbb{C}_j$ существует такой $k \leq i, j$, что $\sigma \in N_n\,\mathbb{C}_k$.

Если $\mathbb{C}$ имеет локально направленное покрытие подкатегориями $\{\mathbb{C}_i\}_{i\in I}$, то $\mathbb{C} = \mathrm{colim}^I \{\mathbb{C}_i\}$.

В [22] было установлено, что если $\{\mathbb{C}_i\}_{i\in I}$ – функтор $I \to Cat$, из ч. у. множества I в категорию малых категорий, такой что либо ч. у. множество I является направленным, либо $\{\mathbb{C}_i\}$ – локально направленное покрытие категории $\mathrm{colim}^I\{\mathbb{C}_i\}$, то для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными произведениями и функтора $F : \mathrm{colim}^I\{\mathbb{C}_i\} \to \mathcal{A}$ существует спектральная последовательность первой четверти

$$E_2^{p,q} = \lim{}^p_{I^{op}}\{\lim{}^q_{\mathbb{C}_i}(F \circ in_i)\} \Longrightarrow \lim{}^{p+q}_{\mathrm{colim}^I\{\mathbb{C}_i\}} F, \tag{4}$$

где $in_i : \mathbb{C}_i \to \mathrm{colim}^I\{\mathbb{C}_i\}$ – канонические морфизмы копредела. В [119] Лаудал построил спектральную последовательность (4) для покрытия ч. у. множества открытыми подмножествами. В каждом из этих случаев имеет место неравенство

$$\mathrm{c.d.}_R \mathrm{colim}^I\{\mathbb{C}_i\} \le \mathrm{c.d.} I^{op} + sup\{\mathrm{c.d.}_R\, \mathbb{C}_i\}. \tag{5}$$

Митчел [137] и Датуашвили [1] доказали неравенство (5) для направленного копредела категорий.

Форд [86] доказал, что если $\mathbb{C}$ – амальгама категорий $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ над $\mathbb{D}$ (т.е. копредел диаграммы $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{D} \subset \mathbb{C}_2$), то существует точная последовательность

$$\cdots \to \lim{}^n_{\mathbb{C}} F \to \lim{}^n_{\mathbb{C}_1} F|_{\mathbb{C}_1} \oplus \lim{}^n_{\mathbb{C}_2} F|_{\mathbb{C}_2} \to \lim{}^n_{\mathbb{D}} F|_{\mathbb{D}} \to \lim{}^{n+1}_{\mathbb{C}} F \to \cdots$$

В этом случае $\mathrm{c.d.}\,\mathbb{C} \le sup\{1 + \mathrm{c.d.}\,\mathbb{D}, \mathrm{c.d.}\,\mathbb{C}_1, \mathrm{c.d.}\,\mathbb{C}_2\}$.

Произведение категорий. В [22] построена спектральная последовательность

$$\lim{}^p_{\mathbb{C}}\{\lim{}^q_{\mathbb{D}}\{F(c,d)\}\} \Longrightarrow \lim{}^{p+q}_{\mathbb{C}\times\mathbb{D}} F.$$

Она дает неравенство $\mathrm{c.d.}_R\, \mathbb{C} \times \mathbb{D} \le \mathrm{c.d.}_R\, \mathbb{C} + \mathrm{c.d.}_R\, \mathbb{D}$, для произвольных кольца R с 1 и малых категорий $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$.

Групповой рефлектор моноида. Если M – абелев моноид с сокращениями, то групповой рефлектор $\hat{M}$ будет группой дробей моноида M, и канонические гомоморфизмы $\eta_M : M \to \hat{M}$ будут инъективными.

Теорема 1.28 *[69]. Если M – абелев моноид, который либо конечно-порожден, либо допускает сокращения, то* $\mathrm{c.d.}_R M = \mathrm{c.d.}_R \hat{M}$.

2 Гомологическая размерность малой категории

Гомологии малой категории вводятся двойственно когомологиям. В этой части речь идет об интерпретации первого модуля гомологий, о различных характеризациях категорий гомологической размерности 0, о характеризации ч. у. множеств гомологической размерности 1, и о сравнении гомологической и когомологической размерностей.

2.1 Гомологии малых категорий

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными копроизведениями, $\mathbb{C}$ – малая категория. Для любого функтора $F : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ имеем функтор $F^{op} : \mathbb{C}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$, в абелеву категорию $\mathcal{A}^{op}$ с точными произведениями. Копредел $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}} F$ в $\mathcal{A}$ можно рассматривать как предел $\lim_{\mathbb{C}^{op}} F^{op}$ в категории $\mathcal{A}^{op}$. Значит, левые сателлиты $\operatorname{colim}_n^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}$ можно рассматривать как правые сателлиты функтора $\lim_{\mathbb{C}^{op}} : (\mathcal{A}^{op})^{\mathbb{C}^{op}} \to \mathcal{A}^{op}$.

Цепной комплекс. Для любого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ обозначим через $in_i : A_i \to \sum_{i\in I} A_i$ канонические морфизмы в копроизведение. *Цепной комплекс* $C_*(\mathbb{C}, F)$ по определению состоит из копроизведений

$$C_n(\mathbb{C}, F) = \sum_{c_0 \to \cdots \to c_n} F(c_0), \quad n \geq 0,$$

и морфизмов $\partial_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n^i : C_{n+1}(\mathbb{C}, F) \to C_n(\mathbb{C}, F)$, где ∂_n^i определяются как удовлетворяющие для каждого

$$\sigma = (c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n+1}} c_{n+1}) \in N_{n+1}\mathbb{C}$$

равенствам

$$\partial_n^i \circ in_\sigma = \begin{cases} in_{d_i^{n+1}\sigma} \quad , & 1 \leq i \leq n+1 \\ in_{d_0^{n+1}\sigma} \circ F(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1) \quad , & i = 0. \end{cases}$$

Положим $C_n(\mathbb{C}, F) = 0$ для всех $n < 0$. Под *n-м объектом гомологий категории $\mathbb{C}$ с коэффициентами в F* понимается объект

$$H_n(\mathbb{C}, F) = Ker\partial_{n-1}/Im\partial_n.$$

Ясно, что для абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями существуют изоморфизмы

$$\operatorname{colim}_n^{\mathbb{C}} F \cong H_n(\mathbb{C}, F),$$

естественные по $F \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$.

Пример 2.1 *(Циклические гомологии) В [76] Коннес ввел циклическую категорию Λ, имеющую множество объектов $Ob\Lambda = \{\Lambda_n : n \in \mathbf{N}\}$, морфизмами между которыми $f \in \Lambda(\Lambda_n, \Lambda_m)$ являются гомотопические классы непрерывных отображений $\varphi : S^1 \to S^1$ степени 1, удовлетворяющих условию $\varphi(\mathbf{Z}_{n+1}) \subseteq \mathbf{Z}_{m+1}$. Здесь S^1 – множество комплексных чисел $\lambda \in \mathbf{C}$ с абсолютной величиной $|\lambda| = 1$; $\mathbf{Z}_n \subset S^1$ – подгруппа всех решений уравнения $\lambda^n = 1$. Существует изоморфизм $\Lambda \cong \Lambda^{op}$ [76]. Малую категорию Λ можно также получить как фактор-категорию следующей категории $E\Lambda$ [77]. Категория $E\Lambda$ имеет в каждой размерности n один объект $(\mathbf{Z}, n)$, ее морфизмы $f : (\mathbf{Z}, n) \to (\mathbf{Z}, m)$ – неубывающие отображения (при $n, m \geq 1$)*

$$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, \quad f(x+n) = f(x) + m \quad \forall x \in \mathbf{Z}.$$

Имеет место равенство $\Lambda = E\Lambda/\mathbf{Z}$*, для действия* $\mathbf{Z}$ *с помощью сдвигов.*

Циклическим объектом в категории $\mathcal{A}$ *называется функтор* $\Lambda \to \mathcal{A}$. *Пусть* k *– кольцо с 1. Циклический объект в категории* $\mathcal{A} = Mod_k$ *называется* $k(\Lambda)$*-модулем. Пусть* E *–* $k(\Lambda)$*-модуль. Тогда циклические* k*-модули гомологий определяются по формуле*

$$HC_n(E) = Tor_n^{k(\Lambda)}(\Delta_\Lambda k, E).$$

Отсюда $HC_n(E) \cong \operatorname{colim}_n^\Lambda E$. *Коннес изучал также модули*

$$\operatorname{Ext}^n(\Delta_\Lambda \mathbf{Z}, E) \cong \lim{}_\Lambda^n E$$

в работе [76, IV], но циклические когомологии определяются с помощью $HC^n(E) = \operatorname{Ext}^n_{k(\Lambda)}(E, \Delta_\Lambda k)$.

Спектральная последовательность прямого образа. Пусть $\mathcal{A}$ – категория. Рассмотрим функтор $S^* : \mathcal{A}^{\mathbb{D}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, действующий на $F \in \mathcal{A}^{\mathbb{D}}$ как $S^*(F) = F \circ S$. Если $\mathcal{A}$ – кополная (полная), то функтор S^* имеет левый (правый) сопряженный функтор, который называется *левым (правым) расширением Кана* $Lan^S : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{D}}$ ($Ran_S : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{D}}$) *вдоль* S. Если $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными копроизведениями, то Lan^S имеет левые сателлиты $Lan_q^S : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{D}}$, и существуют естественные по $F \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, $d \in \mathbb{D}$, изоморфизмы

$$Lan_q^S F(d) \cong \operatorname{colim}_q^{S/d}(F \circ Q_d),$$

где $Q_d : S/d \to \mathbb{C}$ – забывающие функторы [87, Приложение 2].

Теорема 2.1 *[37] Пусть* $S : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *– функтор между малыми категориями,* $\mathcal{A}$ *– абелева категория с точными копроизведениями. Тогда существует спектральная последовательность (третьей четверти)*

$$\operatorname{colim}_p^{\mathbb{D}}\{\operatorname{colim}_q^{S/d} F \circ Q_d\}_{d\in\mathbb{D}} \Rightarrow \operatorname{colim}_{p+q}^{\mathbb{C}} F$$

Замечание 2.2 *Если* $\mathcal{A}$ *– абелева категория с точными произведениями, то получаем спектральную последовательность первой четверти*

$$\lim{}_{\mathbb{D}}^p\{\lim{}_{d/S}^q F \circ Q'_d\}_{d\in\mathbb{D}} \Rightarrow \lim{}_{\mathbb{C}}^{p+q} F,$$

где $Q'_d : d/S \to \mathbb{C}$ *– забывающий функтор. Здесь и в теореме Андре точность произведений (копроизведений) существенна. Пусть, например,* E *– множество,* $\mathcal{A}$ *– абелева категория, в которой копроизведение* $\sum_{e\in E} : \mathcal{A}^E \to \mathcal{A}$ *не является точным. Пусть* $\mathbb{C}$ *состоит из двух объектов* a, b *и двух морфизмов* $f_0 : a \to b$, $f_1 : a \to b$ *(исключая тождественные* 1_a, 1_b*). Тогда для проекции* $S : E \times \mathbb{C} \to E$ *теорема Андре неверна.*

В работе [40] спектральная последовательность Андре была применена в комбинаторике ч. у. множеств.

Спектральная последовательность ограничения. Пусть $\mathcal{A}$ – аддитивная копολная категория, $\mathbb{C}$ – малая категория. *Символическим тензорным произведением* называется аддитивный бифунктор

$$\otimes_{\mathbb{C}} : Ab^{\mathbb{C}^{op}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{A},$$

для которого имеет место изоморфизм

$$\mathcal{A}(G \otimes_{\mathbb{C}} F, A) \cong Ab^{\mathbb{C}^{op}}(G, \mathcal{A}(F(-), A)),$$

естественный по $G \in Ab^{\mathbb{C}^{op}}$, $F \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ и $A \in \mathcal{A}$. Существование такого естественного изоморфизма характеризует $\otimes_{\mathbb{C}}$ с точностью до естественного изоморфизма и показывает, что $\otimes_{\mathbb{C}}$ сохраняет копределы по каждому аргументу. Если $\mathcal{A}$ – абелева категория с копроизведениями, то положим $Tor_k^{\mathbb{C}}(G, F) = H_k(P_* \otimes_{\mathbb{C}} F)$, где $P_* \to G$ – проективная резольвента объекта $G \in Ab^{\mathbb{C}^{op}}$. Таким образом, $Tor_k^{\mathbb{C}}(G, F)$ – левые производные функторы относительно первого аргумента. Будем называть G *свободным на каждом месте*, если $G(c)$ свободны для всех $c \in Ob\,\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{A}$ имеет точные копроизведения. Тогда для каждого свободного на каждом месте функтора $G \in Ab^{\mathbb{C}^{op}}$ функтор $Tor_k^{\mathbb{C}}(G, -) : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}$ будет k-м левым сателлитом функтора $G \otimes_{\mathbb{C}} (-)$. Если G – проективный объект категории $Ab^{\mathbb{C}^{op}}$, то $G \otimes_{\mathbb{C}} (-)$ точен. Значит, для любого $G \in Ab^{\mathbb{C}^{op}}$ функторы $Tor_k^{\mathbb{C}}(G, -)$ составляют гомологический ∂-функтор в смысле Гротендика [94]. Применяя спектральную последовательность Гротендика к композиции функторов

$$Lan^{S^{op}} : Ab^{\mathbb{C}^{op}} \to Ab^{\mathbb{D}^{op}} \quad (-) \otimes_{\mathbb{D}} F : Ab^{\mathbb{D}^{op}} \to \mathcal{A}, \quad F \in \mathcal{A}^{\mathbb{D}},$$

получаем следующий результат Оберста [145]:

Теорема 2.2 *Пусть $S : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ – функтор между малыми категориями, $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными суммами. Тогда существует спектральная последовательность (третьей четверти)*

$$Tor_p^{\mathbb{D}}(Lan_q^{S^{op}} \Delta_{\mathbb{C}^{op}} \mathbf{Z}, F) \Rightarrow \operatorname{colim}_{p+q}^{\mathbb{C}}(F \circ S),$$

естественная по $F \in \mathcal{A}^{\mathbb{D}}$.

Замечание 2.3 *Символическим hom-функтором называется аддитивный бифунктор*

$$Hom_{\mathbb{C}}(-, =) : Ab^{\mathbb{C}^{op}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{A},$$

для которого существует изоморфизм

$$\mathcal{A}(A, Hom_{\mathbb{C}}(G, F)) \cong Ab^{\mathbb{C}}(G, \mathcal{A}(A, F(-))),$$

естественный по $G \in Ab^{\mathbb{C}}$, $F \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ и $A \in \mathcal{A}$. Это характеризует $Hom_{\mathbb{C}}$ с точностью до естественного изоморфизма. Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными произведениями. Для $F \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ обозначим через $\operatorname{Ext}_{\mathbb{C}}^k(-, F)$ правые производные функторы функтора $Hom_{\mathbb{C}}(-, F)$. Тогда для каждого функтора $S : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ между малыми категориями существует спектральная последовательность первой четверти

$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{D}}^p(Lan_q^S \Delta_{\mathbb{C}} \mathbf{Z}, F) \Rightarrow \lim{}_{\mathbb{C}}^{p+q}(F \circ S).$$

2.2 Потоки на категориях

Для (ориентированного) графа Γ обозначим через $A(\Gamma)$ множество стрелок, $V(\Gamma)$ – множество вершин.

Определение 2.4 *Пусть Γ – граф, R – кольцо с 1, $F : W\Gamma \to Mod_R$ – функтор из категории путей графа Γ в категорию левых R–модулей. Потоком на Γ с коэффициентами в F называется произвольное семейство $\{f_\gamma\}_{\gamma\in A(\Gamma)}$, удовлетворяющих следующим трем условиям:*
(1) $f_\gamma \in F(\operatorname{dom}\gamma)$, $\forall\gamma \in A(\Gamma)$;
(2) множество $\{\gamma \in A(\Gamma) : f_\gamma \neq 0\}$ является конечным;
(3) для всех $c \in V(\Gamma)$ выполнены равенства $\sum\limits_{c=\operatorname{cod}(\gamma)} F(\gamma)(f_\gamma) = \sum\limits_{c=\operatorname{dom}(\gamma)} f_\gamma$.

Пусть $\Phi(\Gamma, F) \subseteq \sum\limits_{\gamma\in A(\Gamma)} F(\operatorname{dom}(\gamma))$ – подмодули потоков.

Предложение 2.3 *Для каждого функтора $F : W\Gamma \to Mod_R$ имеет место изоморфизм $\Phi(\Gamma, F) \cong \operatorname{colim}_1^{W\Gamma} F$.*

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, $F : \mathbb{C} \to Mod_R$ – функтор. Существуют граф Γ и множество соотношений $\mathcal{R}$, в смысле [137, §19], для которых $\mathbb{C}$ будет фактор-категорией категории $W\Gamma$ по $\mathcal{R}$. Пусть $\pi : W\Gamma \to \mathbb{C}$ – каноническая проекция. Если $v = \alpha_m \cdots \alpha_1$ и $w = \beta_n \cdots \beta_1$ – такие два пути в Γ, что $(v, w) \in \mathcal{R}$, то для каждого $f \in F \circ \pi(\operatorname{dom}(w))$ имеем поток

$$f_{\alpha_1} = f,\ f_{\alpha_2} = F(\alpha_1)f\ , \cdots,\ f_{\alpha_m} = F(\alpha_{m-1} \cdots \alpha_1)f;$$

$$f_{\beta_1} = -f,\ f_{\beta_2} = -F(\beta_1)f\ , \cdots,\ f_{\beta_n} = -F(\beta_{n-1} \cdots \beta_1)f.$$

Обозначим этот поток через $[f, v, w]$. Поток $\varphi \in \Phi(\Gamma, F \circ \pi)$ называется *внутренним по отношению к $\mathcal{R}$*, если существуют $(v_i, w_i) \in \mathcal{R}$, $f_i \in F \circ \pi(\operatorname{dom}(v_i))$, $1 \leq i \leq k$, удовлетворяющие равенству $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{k} [f_i, v_i, w_i]$. Пусть $I(\Gamma, \mathcal{R}, F)$ – R–модуль всех внутренних потоков.

Теорема 2.4 *Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, $F : \mathbb{C} \to Mod_R$ – функтор. Если Γ – граф, $\mathcal{R}$ – множество соотношений в Γ, $\pi : W\Gamma \to \mathbb{C}$ – каноническая проекция на фактор-категорию $W\Gamma/\mathcal{R} = \mathbb{C}$, то*

$$\Phi(\Gamma, F \circ \pi)/I(\Gamma, \mathcal{R}, F) \cong \operatorname{colim}_1^{\mathbb{C}} F.$$

2.3 Категории гомологической размерности 0

Для категорий, все компоненты связности которых фильтрованы, имеет место $\mathrm{h.d.}_R\,\mathbb{C} = 0$. У. Оберстом [146] была выдвинута гипотеза о том, что при $R = \mathbf{Z}$ верно обратное.

Афинизация малой категории. Частные случаи гипотезы Оберста были доказаны в [106] и [146].

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория. Обозначим через $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}$ универсальную предаддитивную категорию, содержащую $\mathbb{C}$. Таким образом, $Ob(\mathbf{Z}\,\mathbb{C}) = Ob\,\mathbb{C}$, а $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}(a,b)$ – свободные абелевы группы, порожденные множествами $\mathbb{C}(a,b)$ при $a,b \in Ob\,\mathbb{C}$. Заметим, что обозначение $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}$ используется также для функтора $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}(-,=) : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to Ab$.

Каждый морфизм категории $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}$ будет линейной комбинацией морфизмов малой категории $\mathbb{C}$, и мы обозначим через $\operatorname{aff}\mathbb{C}$ (неаддитивную) подкатегорию из $\mathbb{C}_{add}$, состоящую из линейных комбинаций, сумма коэффициентов которых равна 1.

Теорема 2.5 *[108]* h.d. $\mathbb{C} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{aff}\mathbb{C}$ *имеет фильтрованные компоненты связности.*

Из этой теоремы вытекает, что гипотеза Оберста верна, если $\mathbb{C}$ – ч. у. множество, ибо в этом случае $\operatorname{aff}\mathbb{C} = \mathbb{C}$.

Исбел [107] построил контрпример к этой гипотезе. Он рассмотрел категорию Δ_{face} всех непустых конечных линейно упорядоченных множеств и сохраняющих порядок инъекций и показал, что $\operatorname{aff}\Delta_{face}$ фильтрована. Ясно, что Δ_{face} не фильтрована, ибо все ее морфизмы являются мономорфизмами.

Свойство неподвижной точки. Исбел и Митчел в [109] дали подробные доказательства результатов, описанных в [108].

Напомним, что $\mathbb{C}$-*множеством* называется произвольный функтор $\mathbb{C} \to Ens$. Пусть F – $\mathbb{C}$-множество, $\tau : F \to F$ – естественное преобразование, тогда $x : \mathbb{C}(c,-) = h^c \to F$ называется *неподвижной точкой* для τ, если $\tau \circ x = x$. Малая категория $\mathbb{C}$ называется имеющей *свойство неподвижной точки*, если каждый эндоморфизм произвольного неразложимого $\mathbb{C}$-множества имеет неподвижную точку. Свойство точности функтора $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}}$ влечет свойство неподвижной точки, и в некоторых случаях эти оба свойства эквивалентны тому, что компонеты связности $\mathbb{C}$ фильтрованы [109].

Открытая проблема 2.5 *Будет ли точность функтора* $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}}$ *эквивалентна свойству неподвижной точки?*

Применения к плоским функторам. Объект $G \in Ab^{\mathbb{C}^{op}}$ называется *плоским*, если $G \otimes_{\mathbb{C}} (-) : Ab^{\mathbb{C}} \to Ab$ точен. Для $M \in Ens^{\mathbb{C}^{op}}$ обозначим через $\mathbf{Z}M$ композицию функторов M и $L : Ens \to Ab$.

Теорема 2.6 *[66] Если M – $\mathbb{C}$-множество, у которого $M(\alpha)$ – инъекции для всех $\alpha \in Mor\,\mathbb{C}$, то $\mathbf{Z}M$ плоский, если и только если* $\operatorname{aff}(h^*/M)$ *имеет фильтрованные компоненты.*

Характеризация Оберста. Оберст [146] охарактеризовал малые категории гомологической размерности 0 следующим образом.

Пусть $\overline{\mathbf{Z}\,\mathbb{C}}$ – универсальная аддитивная категория, порожденная категорией $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}$, $\overline{\mathbf{Z}}$ – расширение постоянного функтора $\Delta_{\mathbb{C}^{op}}\mathbf{Z} : \mathbb{C}^{op} \to Ab$ на категорию $\overline{\mathbf{Z}\,\mathbb{C}}^{op}$.

Теорема 2.7 *[146] Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) функтор $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}} : Ab^{\mathbb{C}} \to Ab$ *точен;*
(2) для всякой абелевой категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющей (AB5), функтор $\operatorname{colim}^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}$ *точен;*
(3) категория $\overline{\mathbf{Z}}\,\mathbb{C}/\overline{\mathbf{Z}}$ фильтрована, где $\overline{\mathbf{Z}}$ рассматривается как объект из $Add(\overline{\mathbf{Z}}\,\mathbb{C}^{op}, Ab)$.

2.4 Гомологическая размерность 1

Группы гомологической размерности 1. О группах гомологической размерности 1 нет информации. Группа называется *локально свободной*, если все ее конечно-порожденные подгруппы свободны. Легко видеть, что локально свободные группы имеют гомологическую размерность 1. В работе [118] показано, что если G – группа гомологической размерности 0, то $G = \{1\}$.

Открытая проблема 2.6 *[118] Доказать, что если G – группа гомологической размерности 1, то G локально свободна.*

Частично упорядоченные множества гомологической размерности 1. Ченг [65] охарактеризовал ч. у. множества гомологической размерности 1. Пусть $\mathbf{C_n}$ обозначает $n-$корону, $n \geq 2$.

Теорема 2.8 *Предположим, что $\mathbb{C}$ – ч. у. множество. Тогда* $\mathrm{h.d.}_R\,\mathbb{C} \leq 1$*, если и только если $\mathbb{C}$ не содержит $\mathbf{C_n}$ в качестве ретракта.*

2.5 Теоремы сравнения гомологической размерности

Гомологическая размерность группового рефлектора. Пусть M – моноид. Групповой рефлектор $\hat{M}$ изоморфен фактор-группе свободной группы, порожденной множеством M, по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей элементы вида xyz^{-1}, для всех удовлетворяющих равенству $xy = z$ элементов $x, y, z \in M$.

Теорема 2.9 *[69]. Если M – абелев моноид, то* $\mathrm{h.d.}_R M = \mathrm{h.d.}_R \hat{M}$.

Сравнение с когомологической размерностью. Д. М. Лэтч и Б. Митчел установили следующее неравенство

Теорема 2.10 *[118] Если мощность множества морфизмов категории $\mathbb{C}$ равна $\aleph_n$, то*
$$\mathrm{h.d.}_R\,\mathbb{C} \leq cd_{R^{op}}\,\mathbb{C}^{op} \leq n + 1 + \mathrm{h.d.}_R\,\mathbb{C}.$$

Эта теорема немного раньше была доказана Лэтч [115], при дополнительных ограничениях на $\mathbb{C}$.

3 Когомологии с коэффициентами в натуральных системах

В этой части изучается связь между когомологиями и расширениями малых категорий. Сначала мы дадим определение групп когомологий $H^n(\mathbb{C}, F)$, введенных Бауэсом и Виршингом [53]. Затем сравним эти группы со значениями производных функторов предела и укажем интерпретацию элементов из групп $H^n(\mathbb{C}, F)$.

3.1 Когомологии Бауэса–Виршинга и производные функтора предела

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория. Для произвольного $a \in Ob\,\mathbb{C}$ мы будем отождествлять морфизм 1_a с объектом a, таким образом, $Ob\,\mathbb{C} \subseteq Mor\,\mathbb{C}$. *Категорией факторизаций* $\mathbb{C}'$ называется категория, объектами которой служат все морфизмы из $\mathbb{C}$, а множества морфизмов $\mathbb{C}'(f, g)$ между $f, g \in Mor\,\mathbb{C}$ состоят из пар (α, β), $\alpha, \beta \in Mor\,\mathbb{C}$, для которых диаграммы

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\beta} & b' \\ \uparrow f & & \uparrow g \\ a & \xleftarrow{\alpha} & a' \end{array}$$

коммутативны. Композиция определяется с помощью $(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta) = (\alpha \circ \alpha', \beta' \circ \beta)$; в частности, $(\alpha, \beta) = (\alpha, 1) \circ (1, \beta) = (1, \beta) \circ (\alpha, 1)$. Функторы $D : \mathbb{C}' \to Ab$ называются ***натуральными системами*** на $\mathbb{C}$. Обозначим $\beta_* = D(1, \beta)$, $\alpha^* = D(\alpha, 1)$.

Пусть $D : \mathbb{C}' \to Ab$ – натуральная система на $\mathbb{C}$, а $N_*\,\mathbb{C}$ – нерв категории $\mathbb{C}$. Для каждого целого $n \geq 0$ определим группы n–коцепей

$$C^n(\mathbb{C}, D) = \prod_{c_0 \xleftarrow{\alpha_1} c_1 \xleftarrow{\alpha_2} \cdots \xleftarrow{\alpha_n} c_n} D(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_n).$$

Рассматривая элементы из $C^n(\mathbb{C}, D)$ как отображения

$$\varphi : N_n\,\mathbb{C} \to \cup_{g \in Mor\,\mathbb{C}} D(g),$$

принимающие значения $\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in D(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_n)$, где $\varphi(1_c) \in D(1_c)$ при $n = 0$, определим кограницу $d^n : C^n(\mathbb{C}, D) \to C^{n+1}(\mathbb{C}, D)$ при $n > 0$ по формуле

$$(d^n\varphi)(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}) = D(1, \alpha_1)\varphi(\alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i \circ \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \cdots, \alpha_{n+1}) +$$
$$(-1)^{n+1} D(\alpha_{n+1}, 1)\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

Для $n = 0$ положим $(d^0\varphi)(\alpha) = D(1,\alpha)\varphi(\mathrm{dom}\,\alpha) - D(\alpha,1)\varphi(\mathrm{cod}\,\alpha)$. Группы когомологий $H^n(C^*(\mathbb{C},D))$ называются n–ми группами когомологий категории $\mathbb{C}$ с коэффициентами в натуральной системе D. Эти группы изоморфны группам когомологий категории факторизаций с коэффициентами в диаграмме D:

Теорема 3.1 *[53] Для любой натуральной системы F на $\mathbb{C}$ при всех $n \geq 0$ существуют изоморфизмы*

$$H^n(\mathbb{C},F) \cong \lim{}^n_{\mathbb{C}'} F.$$

Пусть $(\mathrm{dom}\,,\mathrm{cod}\,) : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}$ – функтор, переводящий объекты $\alpha \in Mor\,\mathbb{C}$ категории факторизаций в пары $(\mathrm{dom}\,\alpha, \mathrm{cod}\,\alpha)$. Функтор $(\mathrm{dom}\,,\mathrm{cod}\,)$ сопоставляет каждому морфизму $(f,g) : \alpha \to \beta$ морфизм $(f,g) \in Mor(\mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C})$. Комма–категории $(\mathrm{dom}\,,\mathrm{cod}\,)/(a,b)$ имеют тривиальные группы n–х целочисленных гомологий при $n > 0$, откуда по теореме Оберста [145] вытекает следующая

Теорема 3.2 *[53] Для всякого функтора $F : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to Ab$ существуют естественные по F изоморфизмы*

$$H^n(\mathbb{C}, F \circ (\mathrm{dom}\,,\mathrm{cod}\,)) \cong \mathrm{Ext}^n(\mathbf{Z}\,\mathbb{C}, F), \ \forall n \geq 0.$$

Для всех $a \in Ob\,\mathbb{C}$ имеем $H_n(\mathrm{cod}\,/a, \mathbf{Z}) = 0$ при $n > 0$, и $H_0(\mathrm{cod}\,/a, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Применяя теорему Оберста [147] получаем

Теорема 3.3 *[53] Для каждого функтора $F : \mathbb{C} \to Ab$ существуют естественные по F изоморфизмы*

$$H^n(\mathbb{C}, F \circ \mathrm{cod}\,) \cong \lim{}^n F, \ \forall n \geq 0.$$

Пусть $S : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ – функтор между малыми категориями. Для произвольного морфизма $\gamma : a \to b$ из $\mathbb{D}$ обозначим через $S < \gamma >$ следующую категорию:

Объекты категории $S < \gamma >$ суть пары морфизмов $a \xrightarrow{\alpha} S(x) \xrightarrow{\beta} b$, удовлетворяющие $\beta \circ \alpha = \gamma$. Морфизмы между $a \xrightarrow{\alpha_1} S(x_1) \xrightarrow{\beta_1} b$ и $a \xrightarrow{\alpha_2} S(x_2) \xrightarrow{\beta_2} b$ задаются с помощью $f \in \mathbb{C}(x_1,x_2)$, удовлетворяющих соотношениям $S(f) \circ \alpha_1 = \alpha_2$ и $\beta_2 \circ S(f) = \beta_1$.

С помощью теоремы Оберста нетрудно проверить, что канонические морфизмы $H^n(\mathbb{D},-) \to H^n(\mathbb{C},(-) \circ S)$ ∂–функторов будут изоморфизмами тогда и только тогда, когда $H_n(N_*(S < \alpha >))$ равны нулю при всех $n > 0$ и $H_0(N_*(S < \alpha >)) \cong \mathbf{Z}$. Бауэс и Виршинг [53] доказали, что $H^n(\mathbb{D},-) \to H^n(\mathbb{C},(-) \circ S)$ – изоморфизмы, если S – эквивалентность категорий.

3.2 Дифференцирования и линейные расширения

Дифференцирования. Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, D – натуральная система на $\mathbb{C}$. *Дифференцированием* [53] $\Delta : \mathbb{C} \to D$ называется функция, которая переводит каждый морфизм $f : a \to b$ into $\mathbb{C}$ в такой элемент $\Delta(f) \in D(f)$, что

$$\Delta(g \circ f) = D(1, g)(\Delta(f)) + D(f, 1)(\Delta(g)).$$

Дифференцирование называется *внутренним* [53], если существует функция ∇, переводящая каждый объект $a \in \mathbb{C}$ в элемент $\nabla(a) \in D(1_a)$, для которого

$$\Delta(f) = D(1, f)\nabla(\operatorname{dom} f) - D(f, 1)\nabla(\operatorname{cod} f), \ \forall f \in Mor\,\mathbb{C}.$$

Пусть $Der(\mathbb{C}, D)$ и $Ider(\mathbb{C}, D)$ – множества дифференцирований и внутренних дифференцирований соответственно. Относительно покомпонентного сложения эти множества будут абелевыми группами, и фактор-группа будет изоморфна первой группе когомологий ([53], [48])

$$H^1(\mathbb{C}, D) \cong Der(\mathbb{C}, D)/Ider(\mathbb{C}, D).$$

Рекомендуем работу Пирашвили [155], содержащую интерпретацию Унсольда элементов группы $H^1(\mathbb{C}, D)$ с помощью классов эквивалентности накрытий категории $\mathbb{C}$ со слоями D.

Линейные расширения. Пусть D – натуральная система на $\mathbb{C}$. Будем говорить, что

$$D \xrightarrow{+} E \xrightarrow{p} \mathbb{C}$$

есть *линейное расширение* категории $\mathbb{C}$ с помощью D, если выполнены следующие условия (1)–(3).

(1) Категории E и $\mathbb{C}$ имеют равные множества объектов, и p является тождественным на объектах полным функтором.

(2) Для каждого морфизма $f : a \to b$ в $\mathbb{C}$ абелева группа $D(f)$ действует транзитивно и эффективно на подмножестве $p^{-1}(f) \subseteq E(a, b)$. Будем использовать запись $(f_0, \alpha) \mapsto f_0 + \alpha$ для действия $\alpha \in D(f)$ на $f_0 \in p^{-1}(f)$.

(3) Действие удовлетворяет линейному закону дистрибутивности:

$$(f_0 + \alpha) \circ (g_0 + \beta) = f_0 \circ g_0 + f_*\beta + g^*\alpha.$$

Два линейных расширения $D \xrightarrow{+} E \xrightarrow{p} \mathbb{C}$ и $D \xrightarrow{+} E' \xrightarrow{p'} \mathbb{C}$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм категорий $\varepsilon : E \to E'$, with $p' \circ \varepsilon = p$ и $\varepsilon(f_0 + \alpha) = \varepsilon(f_0) + \alpha$ for $f_0 \in MorE$, $\alpha \in D_{pf_0}$. Расширение $D \xrightarrow{+} E \xrightarrow{p} \mathbb{C}$ определяется как *расщепляемое*, если существует функтор $\sigma : \mathbb{C} \to E$, удовлетворяющий $p \circ \sigma = 1$.

Теорема 3.4 *[53] Пусть $M(\mathbb{C}, D)$ – множество классов эквивалентности линейных расширений $\mathbb{C}$ с помощью D. Тогда существует каноническая биекция*

$$\psi : M(\mathbb{C}, D) \cong H^2(\mathbb{C}, D),$$

которая отображает расщепляемое расширение в нуль.

Мы получаем *представляющий коцикл* Δ_t когомологического класса $\{E\} = \psi(E) \in H^2(\mathbb{C}, D)$ расширения $D \xrightarrow{+} E \xrightarrow{p} \mathbb{C}$ следующим образом.

Пусть $t : Mor\,\mathbb{C} \to MorE$ – функции, сопоставляющие каждому $f \in Mor\,\mathbb{C}$ такой морфизм $f_0 = t(f)$ в E, что $p(f_0) = f$. Тогда t представлен коциклом Δ_t, удовлетворяющим соотношению

$$t(g \circ f) = t(g) \circ t(f) + \Delta_t(g, f),$$

с $\Delta_t(g, f) \in D(g \circ f)$. Когомологический класс коцикла Δ_t тривиален, если и только если $D \xrightarrow{+} E \xrightarrow{p} \mathbb{C}$ является расщепляемым расширением.

В работах [44], [45], [46], [50], [156] приводятся примеры и приложения линейных расширений.

Расширения Лича моноидов. Пусть M – моноид, рассматриваемый как малая категория с одним объектом. Под *диаграммой* абелевых групп над M мы будем подразумевать натуральную систему на M. Для любой диаграммы F абелевых групп над M группы $H^n(M, F)$ есть в точности *группы когомологий* M в смысле Лича [124].

Абелево расширение Лича моноида M с помощью диаграммы F над M состоит из некоторого моноида T, заданного вместе с эпиморфизмом моноидов $p : T \to M$, удовлетворяющим следующим условиям (1)–(2).

(1) Для каждого $u \in M$ абелева группа $F(u)$ действует транзитивно и эффективно на подмножестве $\sigma^{-1}(u) \subseteq T$.

Обозначим это действие через $(\alpha \in F(u), x \in \sigma^{-1}(u)) \mapsto a * x$.

(2) Для всех $u, v \in M, x \in \sigma(u), y \in \sigma^{-1}(v), a \in F(u), b \in F(v)$ имеют место равенства $(a * x)u = F(1, v)(a) * (xy)$ и $x(b * y) = F(u, 1)(b) * (xu)$.

Абелевы расширения $\sigma_1 : T_1 \to M$ и $\sigma_2 : T_2 \to M$ называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм $\alpha : T_1 \to T_2$, что $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \alpha$ and $\alpha(a * x) = a * \alpha(x)$. Группа классов эквивалентности абелевых расширений изоморфна $H^2(M, F)$ [15].

Для произвольного эпиморфизма $\sigma : T \to M$ моноидов и натуральной системы $F : M' \to Ab$ спектральная последовательность Оберста

$$\mathrm{Ext}^p(Lan_q^{\sigma'} \Delta_{T'}\mathbf{Z}, F) \Longrightarrow \lim{}^{p+q}_{T'}(F \circ \sigma')$$

дает точную последовательность Лича [124]:

$$0 \to H^1(M, F) \to H^1(T, F \circ \sigma') \to Ab^{M'}(\{H_1(\sigma < \alpha >)\}_{\alpha \in M'}, F)$$

$$\to H^2(M, F) \to H^2(T, F \circ \sigma').$$

3.3 2–категории

Трековые категории. Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, $D : \mathbb{C}' \to Ab$ – натуральная система на $\mathbb{C}$. Пусть $(E, \times, \mathbf{1})$ – категория с конечными произведениями. Категорией, *обогащенной* категорией E называется класс ObK, вместе с семейством объектов $K(A,B) \in ObE$, где $(A,B) \in ObK \times ObK$, и с морфизмами категории E:

$$\mu_{A,B,C} : K(A,B) \times K(B,C) \to K(A,C), i_A : \mathbf{1} \to K(A,A),$$

делающими коммутативными диаграммы в E:

$$\begin{array}{ccc} K(A,B) \times K(B,C) \times K(C,D) & \overset{\mu \times 1}{\longrightarrow} & K(A,C) \times K(C,D) \\ \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\ K(A,B) \times K(B,D) & \overset{\mu}{\longrightarrow} & K(A,B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K(A,B) & \overset{(i_A,1)}{\longrightarrow} & K(A,A) \times K(A,B) \\ \downarrow 1_{K(A,B)} & & \downarrow \mu \\ K(A,B) & \overset{1_{K(A,B)}}{\longrightarrow} & K(A,D) \\ \uparrow 1_{K(A,B)} & & \uparrow \mu \\ K(A,B) & \overset{(1,i_B)}{\longrightarrow} & K(A,B) \times K(B,B). \end{array}$$

Определение 3.1 *Трековой категорией, обозначаемой через TK или*

$$T \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{}} K \overset{p}{\longrightarrow} \mathbb{C},$$

называется категория K, обогащенная категорией группоидов, вместе с полным функтором $p : K \to \mathbb{C}$, тождественным на объектах и удовлетворяющим условию

$$p(f) = p(g) \quad f, g \quad K(A,B) \ \Leftrightarrow \ T(f,g) \neq \emptyset;$$

где $T(f,g)$ обозначает множество $K(A,B)(f,g)$ 2–морфизмов $f \to g$.

Мы пишем $H : f \simeq g$, вместо $H \in T(f,g)$, и называем H *дорожкой* от f к g. (*Вертикальная*) композиция 2-морфизмов обозначается через $+ : T(f,g) \times T(g,h) \to T(f,h)$, обозначим через 0 тождественный морфизм, а $- : T(f,g) \to T(g,f)$ – обратный морфизм. Категория $\mathbb{C}$ изоморфна фактор-категории K по отношению $f \simeq g \Leftrightarrow T(f,g) \neq \emptyset$.

Для любых $G \in MorK(A,B), H \in MorK(B,C)$ обозначим *горизонтальную* композицию $\mu_{A,B,C}(G,H)$ через $H * G$. Положим $f_* G = 0_f * G, g^* H = H * 0_g$. При любых $H : f \simeq f^1, G : g \simeq g^1$ имеет место *закон дистрибутивности*:

$$H * G = f_* G + (g^1)^* H = g^* H + (f^1)_* G.$$

Функтор между трековыми категориями $t : TK \to T'K'$ определяется как функтор $t : K \to K'$, заданный вместе с такими функциями $t_{f,g} : T(f,g) \longrightarrow T'(tf, tg)$, что

$$t(0) = 0, t(H + G) = (tH) + (tG), t(-H) = -(tH),$$

(эти 3 равенства показывают, что t – морфизм группоидов) и

$$t(f_*H) = (tf)_*(tH), t(g^*H) = (tg)^*(tH).$$

Функтор между трековыми категориями индуцирует функтор $t : K/\simeq \to K'/\simeq$ между фактор-категориями.

Пусть $\mathbb{C}$ – категория, D – натуральная система на $\mathbb{C}$. *Линейное трековое расширение* TK категории $\mathbb{C}$ с помощью D, обозначаемое через

$$D \xrightarrow{+} T \underset{\to}{\overset{\to}{}} K \xrightarrow{p} \mathbb{C},$$

определяется как трековая категория $T \underset{\to}{\overset{\to}{}} K \xrightarrow{p} \mathbb{C}$, заданная вместе с функтором p и *действием* D на T. Здесь под *действием* D на T понимается семейство изоморфизмов групп

$$\sigma_f : D(pf) \xrightarrow{\cong} T(f,f), f \in MorK,$$

делающих коммутативными диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} D(pf) & \xrightarrow{\sigma_f} & T(f,f) & & a & \mapsto & \sigma_f(a) \\ \downarrow (pg)^* & & \downarrow g^* & & \downarrow & & \downarrow \\ D(pfpg) & \xrightarrow{\sigma_{fg}} & T(fg,fg) & & D(pg,1)(a) & \mapsto & \sigma_f(a)\circ g. \end{array}$$

Морфизм g^* действует $T(f,f) \to T(fg,fg)$ и равен $(-)\circ g$. Морфизм $(pg)^* : D(pf) \to D(pfpg)$ равен $D(pg,1)$.

$$\begin{array}{ccccccc} D(pg) & \xrightarrow{\sigma_g} & T(g,g) & & a & \mapsto & \sigma_g(a) \\ \downarrow (pf)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow & & \downarrow \\ D(pfpg) & \xrightarrow{\sigma_{fg}} & T(fg,fg) & & D(1,pf)(a) & \mapsto & f\circ\sigma_g(a). \end{array}$$

Морфизм f_* действует $T(g,g) \to T(fg,fg)$ и равен $f\circ(-)$. Морфизм $(pf)_* : D(pg) \to D(pfpg)$ равен $D(1,pf)$.

Для всех 1–морфизмов f,h и 2–морфизма $H : f \simeq h$ рассмотрим функторы

$$T(f,H) : T(f,f) \to T(f,h), x \mapsto H + x,$$

$$T(H,h) : T(h,h) \to T(f,h), x \mapsto x + H.$$

Линейное трековое расширение для всех f,h и $H \in T(f,h)$ должно удовлетворять условию коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} D(ph) = D(pf) & \xrightarrow{\sigma_f} & T(f,f) \\ \downarrow \sigma_h & & \downarrow (-) + H = T(f,H) \\ T(h,h) & \xrightarrow{T(H,f)=H+(-)} & T(f,h) \end{array}$$

Рассмотрим морфизмы между трековыми расширениями. Пусть $\mathbb{C}$ – категория, D – натуральная система на $\mathbb{C}$, TK и $T'K'$ – линейные трековые расширения $\mathbb{C}$ с помощью D. *D–эквивариантным морфизмом* $t : TK \to$

$T'K'$ над $\mathbb{C}$ между линейными трековыми расширениями называется функтор $t : TK \to T'K'$ между трековыми расширениями, удовлетворяющий

$$pt = p, \quad t_{f,f}\sigma_f = \sigma_{tf}, \quad f \in MorK.$$

Значит, все линейные трековые расширения $\mathbb{C}$ с помощью D и D–эквивариантные морфизмы над $\mathbb{C}$ составляют категорию, которую мы обозначим через $Track(\mathbb{C}, D)$. Два объекта в этой категории называются *эквивалентными*, и мы пишем $TK \sim T'K'$, если существуют морфизмы

$$TK \longleftarrow T''K'' \longrightarrow T'K'$$

в $Track(\mathbb{C}, D)$. Множество классов эквивалентности

$$\pi_0 Track(\mathbb{C}, D) = Ob(Track(\mathbb{C}, D))/\sim$$

будет множеством компонент связности категории $Track(\mathbb{C}, D)$.

Теорема 3.5 *[16], [49] Существует каноническая биекция*

$$\psi : \pi_0 Track(\mathbb{C}, D) \cong H^3(\mathbb{C}, D).$$

Пример 3.2 *Категория Top^* пунктированных топологических пространств является трековой. Пусть I – единичный интервал, и пусть $IX = I\times X/I\times\{*\}$ – редуцированный цилиндр над $X \in Top^*$. Имеем отображения*

$$X \vee X \xrightarrow{(i_0,i_1)} IX \xrightarrow{p} X,$$

где $X\vee X$ – букет пространств. Здесь мы полагаем $i_t(x) = (t,x)$ и $p(t,x) = x$, $t \in I, x \in X$. Для отображений $f, g : X \to Y \in Top^*$ обозначим через

$$T(f,g) = [IX, Y]^{(f,g)}$$

множество гомотопических классов относительно $X \vee X$ отображений $H : IX \to Y$, таких что $H(i_0,i_1) = (f,g)$. Элемент $H \in T(f,g)$ называется дорожкой *$H : f \simeq g$. Это определяет трековую категорию*

$$T \overset{\to}{\underset{\to}{}} Top^* \to Top^*/\simeq,$$

дающую следующие трековые расширения:

Теорема 3.6 *[44] (A) Пусть K – полная подкатегория из Top^*, все объекты которой являются надстройками. Тогда существует натуральная система D_Σ on $K/\simeq$, вместе с линейным трековым расширением*

$$D_\Sigma \xrightarrow{+} T \overset{\to}{\underset{\to}{}} K \to K/\simeq.$$

(B) Пусть K' – полная подкатегория из Top^*, все объекты которой являются пространствами петель. Тогда существует натуральная система D_Ω on $K'/\simeq$, вместе с линейным трековым расширением

$$D_\Omega \xrightarrow{+} T \overset{\to}{\underset{\to}{}} K' \to K'/\simeq$$

Из теоремы 3.5 следует, что эти линейные трековые расширения соответствуют некоторым когомологическим классам $< K >_\Sigma \in H^3(K/\simeq, D_\Sigma)$ и $< K' >_\Omega \in H^3(K'/\simeq, D_\Omega)$. Эти классы называются универсальными скобками Тоды для K и K'. Все классические тройные скобки Тоды $< f, g, h >$ можно получить, согласно [49] и [44], из универсальной скобки Тоды $< K >_\Sigma$.

Заметим, что Бауес и Дрекман в [49] рассмотрели более общии теории когомологий категорий.

Бикатегорная интерпретация. М. Джибладзе [2] построил другую интерпретацию $H^3(\mathbb{C}, D)$.

Бикатегория B состоит из

a) класса $\mathrm{Ob}\, B$ объектов;

b) семейства категорий $B(X, Y)$, где $X, Y \in Ob\, B$;

c) семейства объектов $I_X \in B(X, X)$, где $X \in Ob\, B$;

d) семейства функторов

$$M_{X,Y,Z} : B(X, Y) \times B(Y, Z) \to B(X, Z),$$

где $X, Y, Z \in Ob\, B$;

e) семейств естественных изоморфизмов

$$\lambda_{X,Y} : 1_{B(X,Y)} \to M_{X,X,Y} \circ (I_X \times 1_{B(X,Y)}),$$

$$\rho_{X,Y} : 1_{B(X,Y)} \to M_{X,Y,Y} \circ (1_{B(X,Y)} \times I_Y),$$

$$\mu_{X,Y,Z,T} : M_{X,Y,T} \circ (1 \times M_{Y,Z,T}) \to M_{X,Z,T} \circ (M_{X,Y,T} \times 1),$$

удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям согласованности.

Гомоморфизмом $P : B \to \mathbb{C}$ между бикатегориями называется отображение, сопоставляющее каждому объекту X из B некоторый объект PX в $\mathbb{C}$ и изоморфизм

$$P_X : I_{PX} \to P(I_X),$$

каждой паре объектов X, Y – функтор

$$P_{X,Y} : B(X, Y) \to \mathbb{C}(PX, PY),$$

и каждой паре $(G : X \to Y, F : Y \to Z)$ – изоморфизм

$$P(F, G) : (PF)(PG) \to P(FG),$$

удовлетворяющие подходящим условиям согласованности.

Для произвольного множества S обозначим через $Ad(S)$ антидискретную категорию с $Ob(Ad(S)) = S$.

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, D – натуральная система на $\mathbb{C}$. Рассмотрим $\mathbb{C}$ как бикатегорию, для которой все $\mathbb{C}(X, Y)$ дискретны. Гомоморфизм $P : B \to \mathbb{C}$ бикатегорий называется *линейным бирасширением* категории $\mathbb{C}$ с помощью D, если

1) P тождественный на объектах;

2) для морфизма $f : X \to Y$ категории $\mathbb{C}$, $P^{-1}(f)$ будет обозначать полную подкатегорию из $B(X,Y)$, которую P переводит в f, тогда очевидный функтор

$$P^{-1}(f) \longrightarrow Ad(S)$$

должен иметь структуру линейного расширения с помощью постоянной натуральной системы $D(f)$;

3) более того, действия $D(f)$ на $p^{-1}(f)$ согласованы с композицией, то есть для всякой диаграммы

$$X \underset{g''}{\overset{g'}{\rightrightarrows}} Y \underset{f''}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} Z$$

в B и 2–морфизмов $\psi : g' \to g''$, $\varphi : f' \to f''$, удовлетворяющих $P(f') = P(f'') = f$, $P(g') = P(g'') = g$, $P(\psi) = 1_g$, $P(\varphi) = 1_f$, имеют место равенства

$$f'(b+\psi) = f\,b + f'\psi, \quad (a+\varphi)g' = a\,g + \varphi\,g'$$

для всех $a \in D(f)$, $b \in D(g)$. Определяется *морфизм* между бирасширениями. Если существует морфизм между $P_1 : B_1 \to \mathbb{C}$ и $P_2 : B_2 \to \mathbb{C}$, то P_1 и P_2 объявляются *эквивалентными.* М. Джибладзе доказал, что существует биекция между элементами группы $H^3(\mathbb{C}, D)$ и классами эквивалентности бирасширений с помощью D.

Итерированные линейные расширения. Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, $F : \mathbb{C}' \to Ab$ – натуральная система. Пирашвили [17] ввел *n–кратное линейное расширение* для $n \geq 1$

$$0 \to F \xrightarrow{\gamma} F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \to E \xrightarrow{p} \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$ с помощью F как точную последовательность

$$0 \to F \xrightarrow{\gamma} F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1$$

натуральных систем на $\mathbb{C}$ с линейным расширением

$$Coker\partial_2 \xrightarrow{+} E \xrightarrow{p} \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$ с помощью натуральной системы $Coker\partial_2$. Все n–кратные линейные расширения $\mathbb{C}$ с помощью F составляют категорию, множество компонент связности которой обозначается через $M^n(\mathbb{C}, F)$. Пирашвили доказал, что $M^n(\mathbb{C}, F) \cong H^{n+1}(\mathbb{C}, F)$, при всех $n \geq 1$.

3.4 Размерность Бауэса–Виршинга

Для произвольной малой категории $\mathbb{C}$ ее *размерность Бауэса–Виршинга* определяется как $\mathrm{Dim}\ \mathbb{C} = \mathrm{c.d.}\,\mathbb{C}'$, где $\mathbb{C}'$ – категория факторизаций.

Пусть $\Sigma \subseteq Mor(\mathbb{C})$ – множество морфизмов. Бауэс и Виршинг доказали в [53], что если $\mathrm{Dim}\, \mathbb{C} \leq 1$, то $\mathrm{Dim}\, (\Sigma^{-1}\, \mathbb{C}) \leq 1$.

Заметим, что теоремы Лаудала и Ченга, о характеризации категорий когомологической размерности 0, характеризуют категории, обладающие свойством $\mathrm{Dim}\, \mathbb{C} = 0$.

Если малая категория допускает сокращения, то $\mathrm{Dim}\, \mathbb{C} = \dim \mathbb{C}$, и свойства размерности Бауэса–Виршинга для таких категорий будут обсуждаться в следующей части.

4 Размерность Хохшильда–Митчела малой категории

Размерность Хохшильда–Митчела имеет источники в теории колец. Мы начнем с обобщения когомологий Хохшильда и их интерпретации на алгеброиды. Затем рассмотрим категории с сокращениями размерности Хохшильда–Митчела 1. После этого мы опишем размерности конечных ч. у. и линейно упорядоченных множеств. Раздел завершается обзором работ Джибладзе и Пирашвили по приложениям в теории когомологий алгебраических теорий.

4.1 Размерность Хохшильда алгеброидов

Пусть $\mathcal{A}$ – предаддитивная категория, и пусть $C(\mathcal{A})$ обозначает класс эндоморфизмов тождественного функтора $1_{\mathcal{A}}$. Тогда $C(\mathcal{A})$ – коммутативное кольцо с 1 (если игнорировать то обстоятельство, что класс его элементов может не быть множеством), которое называется *центром* $\mathcal{A}$. Если Λ – предаддитивная категория, рассматриваемая как кольцо, то $C(\Lambda)$ изоморфно подкольцу, состоящему из всех таких $c \in \Lambda$, что $c\lambda = \lambda c$ при всех $\lambda \in \Lambda$.

Пусть K – коммутативное кольцо с 1. *K–категорией* называется предаддитивная категория $\mathcal{A}$ вместе с гомоморфизмом колец $K \to C(\mathcal{A})$. Эквивалентно, K–категория есть категория $\mathcal{A}$, наделенная K–модульной структурой на каждом hom–множестве таким образом, что композиция

$$\mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(B, C) \longrightarrow \mathcal{A}(A, C)$$

K–билинейна.

Однообъектная K–категория будет в точности ассоциативной K–алгеброй, и это послужило поводом для того, чтобы Митчел назвал малую K–категорию *K–алгеброидом.* Пусть $\mathcal{A}$ и B — K–категории. Функтор $F : \mathcal{A} \to B$ называется *K–функтором,* если $\mathcal{A}(A, A') \to B(FA, FA')$ является K–модульным гомоморфизмом при всех A, A'. Обозначим через $B^{\mathcal{A}}$ категорию всех K–функторов $\mathcal{A} \to B$ из K–алгеброида $\mathcal{A}$ в K–категорию B. *Тензорное произведение K–алгеброидов* $\mathcal{A} \otimes_K B$ можно определить очевидным путем, как допускающее естественные изоморфизмы

$$Add(\mathcal{A} \otimes_K B, C) \cong Add(B, Add(\mathcal{A}, C)).$$

$\mathcal{A}$*-модулем* называется аддитивный функтор $M : \mathcal{A} \to Ab$, или, равносильно, K-функтор $M : \mathcal{A} \to Mod_K$.

Размерность Хохшильда. Пусть $\mathcal{A}$ — K–алгеброид. *Алгеброидом, обертывающим* $\mathcal{A}$ называется категория $\mathcal{A}^e = \mathcal{A}^{op} \otimes_K \mathcal{A}$. Для произвольного $\mathcal{A}^e$-модуля M определяются *группы когомологий Хохшильда* алгеброида $\mathcal{A}$ с коэффициентами в M

$$H^n(\mathcal{A}, M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A}, M),$$

где $\mathcal{A}$ обозначает функтор $\mathcal{A}(-,=) : \mathcal{A}^{op} \otimes_K \mathcal{A} \to Ab$ (эквивалентно, K-функтор из $\mathcal{A}^e$ в Mod_K).

Размерностью Хохшильда $\dim_K \mathcal{A}$ называется проективная размерность объекта $\mathcal{A}(-,=)$ в категории $Add(\mathcal{A}^e, Ab)$.

Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, $K\,\mathbb{C}$ обозначает K–категорию, порожденную $\mathbb{C}$. Тогда размерность $\dim_K K\,\mathbb{C}$ равна проективной размерности объекта $K\,\mathbb{C}(-,=) \in Mod_K^{\mathbb{C}^{op}\times\mathbb{C}}$. Значит, размерность Хохшильда–Митчела $\dim_K \mathbb{C}$ будет равна проективной размерности $K\,\mathbb{C}(-,=) \in Ab^{\mathbb{C}^{op}\times\mathbb{C}}$.

Для размерности Хохшильда–Митчела $\dim\,\mathbb{C}$ можно дать следующее определение [53]:

$$\dim_K \mathbb{C} = sup\{n \geq 0 : \lim{}^n_{\mathbb{C}'}(-) \circ (\mathrm{dom}\,, \mathrm{cod}\,) \neq 0\},$$

где $\lim{}^n_{\mathbb{C}'}$ — функторы из $Mod_K^{\mathbb{C}'}$ в Mod_K.

Дифференцирования K-алгеброидов. Если M — $\mathcal{A}^e$-модуль, то *дифференцированием* [73] в M называется семейство K-модульных гомоморфизмов

$$d = d_{a,b} : \mathcal{A}(a,b) \to M(a,b),$$

удовлетворяющих $d(\lambda\mu) = (d\lambda)\mu + \lambda(d\mu)$. Дифференцирования вида $d\lambda = \lambda m_a - m_b\lambda$, $\lambda \in \mathcal{A}(a,b)$, для некоторых семейств $m_a \in M(a,a)$, называются *главными.* Фактор-модуль K-модуля дифференцирований по модулю главных дифференцирований изоморфен $H^1(\mathcal{A}, M)$.

Расширения над K-алгеброидами. Пусть задан K-алгеброид $\mathcal{A}$. Напомним, что (двухсторонний) идеал в $\mathcal{A}$ есть подфунктор $I \subseteq \mathcal{A}$. Он позволяет построить фактор-алгеброид $\mathcal{A}/I$. Тождественный на объектах морфизм K-алгеброидов $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$ называется *расширением* над $\mathcal{A}$, если $f_{a,b} : \mathcal{E}(a,b) \to \mathcal{A}(a,b)$ – инъективные гомоморфизмы K–модулей для всех $a, b \in Ob\mathcal{A}$. Если $M(a,b)$ – ядра $f_{a,b}$, то M – идеал в $\mathcal{E}$, и мы имеем $\mathcal{A} \cong \mathcal{E}/M$. Двухстороннее действие $\mathcal{E}$ на M индуцирует двухстороннее действие $\mathcal{A}$ на M, если и только если $M^2 = 0$. Здесь M^2 – идеал, порожденный $m_1 m_2$, где $m_1, m_2 \in M$. Обозначая вложение $M \to \mathcal{E}$ через g, мы будем говорить тогда, что семейство коротких точных последовательностей K-модулей $M \xrightarrow{g} \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{A}$ является *сингулярным расширением над* $\mathcal{A}$ *с ядром* M. Два таких расширения (g_1, f_1) и (g_2, f_2), с одинаковым ядром M называются *эквивалентными*, если найдется такой морфизм $k : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ между K-алгеброидами, что $kg_1 = g_2$ и $f_2 k = f_1$. В этом случае k будет даже изоморфизмом.

$\mathcal{A}$-модуль называется *K-проективным*, если $M(a)$ – проективные K-модули для всех $a \in Ob\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ являются K-проективными как $\mathcal{A}^e$-модули, то существует биекция между классами эквивалентности сингулярных расширений над $\mathcal{A}$ с ядром M и элементами группы $H^2(\mathcal{A}, M)$ [73].

4.2 Размерность Хохшильда–Митчела категорий со слабыми сокращениями

В работе [53] были доказаны неравенства $\text{c.d.}\,\mathbb{C} \leq \dim \mathbb{C} \leq \text{Dim}\, \mathbb{C}$. Для состоящего из двух элементов идемпотентного моноида $E = \{1, e\}$ было доказано [32], что $\dim \mathbb{C} = 0$ и $\text{Dim}\, \mathbb{C} = 1$. Стало быть, каждое из этих неравенств может быть строгим.

Категории размерности 0. Если $\mathbb{C}$ – категория, не имеющая идемпотентов, кроме тождественных морфизмов, то $\dim \mathbb{C} = 0$ тогда и только тогда, когда категория $\mathbb{C}$ эквивалентна дискретной категории. Две малые аддитивные категории C и $\mathcal{D}$ называются em эквивалентными в смысле Мориты, если категории $Add(C, Ab)$ и $Add(\mathcal{D}, Ab)$ эквивалентны. Митчел [139] предположил, что $\dim \mathbb{C} = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая дискретная категория $\mathbb{D}$, что категория $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}$ эквивалентна $\mathbf{Z}\,\mathbb{D}$ в смысле Мориты. В работе [142] он охарактеризовал все малые категории размерности 0. Ченг охарактеризовал моноиды размерности 0 [64].

Напомним, что *дельта* есть малая скелетальная категория, все эндоморфизмы которой являются тождественными.

Если $\mathbb{C}$ – дельта, и для некоторого коммутативного кольца K имеет место равенство $\dim_K \mathbb{C} = 0$, то $\mathbb{C}$ – дискретная [137, Раздел 33].

Размерность дельт. Пусть $\mathbb{C}$ – дельта. Если $a, b \in Ob\,\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}(a, b) \neq \emptyset$, то мы положим $a \leq b$. Полная подкатегория дельты с множеством объектов $\{x \in Ob\,\mathbb{C} : a \leq x \leq b\}$ называется *мускулом*. Дельта называется *слабой*, если каждый ее мускул имеет конечное число морфизмов.

Слабые дельты размерности $\dim_K \mathbb{C} \leq 2$ охарактеризованы Митчелом [137].

Митчел доказал в [137], что если малая категория $\mathbb{C}$ свободна, то

$$\dim_K \mathbb{C} \leq 1.$$

Гипотеза 4.1 *[137] Пусть $\mathbb{C}$ – произвольная дельта. Если $\dim_K \mathbb{C} \leq 1$, то $\mathbb{C}$ – свободная категория.*

Митчел подтвердил эту гипотезу для слабых дельт и для ч. у. множеств [137, С. 151]. Полностью гипотеза была доказана Ченгом [62]:

Теорема 4.1 *Пусть K – коммутативное кольцо с 1, $\mathbb{C}$ – дельта. Тогда $\dim_K \mathbb{C} \leq 1$, если и только если $\mathbb{C}$ – свободная категория.*

Размерность категорий с сокращениями.

Теорема 4.2 *[32] Пусть* $\mathbb{C}$ *– категория с сокращениями. Тогда* $\mathrm{Dim}\,\mathbb{C} = \dim\mathbb{C}$.

Следствие 4.3 *Пусть* $\mathbb{C}$ *– категория с сокращениями,* G *– подгруппоид из* $\mathbb{C}$*. Тогда* $\dim G \leq \dim\mathbb{C}$.

Для групп $\mathbb{C}$ это утверждение известно как лемма Шапиро.

Ченг, Ву и Митчел [73] доказали, что если размерность Хохшильда–Митчела категории не больше 1, то размерность ее категории частных не больше 1:

Теорема 4.4 *Если* $\dim_K\mathbb{C} \leq 1$*, то для любого подмножества* $\Sigma \subseteq Mor\,\mathbb{C}$ *верно неравенство*

$$\dim_K \Sigma^{-1}\,\mathbb{C} \leq 1.$$

Отсюда вытекает, что для частично свободной категории $\mathbb{C}$ имеет место неравенство $\dim_K\mathbb{C} \leq 1$. Теорема 4.4 справедлива для K-алгеброидов $\mathcal{A}$ и любых подмножеств $\Sigma \subseteq Mor\mathcal{A}$, когда $\mathcal{A}$ — K-проективный $\mathcal{A}^e$-модуль.

Для когомологической размерности малых категорий теорема Столлингса и Суона неверна. Тем не менее гипотеза 1.8 становится справедливой, если в ее формулировке когомологическую размерность заменить размерностью Хохшильда–Митчела:

Теорема 4.5 *[31] Пусть* $\mathbb{C}$ *– категория с сокращениями размерности*

$$\dim\mathbb{C} \leq 1.$$

Тогда $\mathbb{C}$ *частично свободна.*

Категория $\mathbb{C}$ называется допускающей *слабые сокращения*, если для любых $\alpha, \beta \in Mor\,\mathbb{C}$ выполнены следующие условия:

(i) $\alpha\beta = \alpha \quad \beta\alpha = \alpha \Rightarrow \beta = 1$;

(ii) если $\alpha v\beta = \alpha\beta$ для некоторого обратимого морфизма v, то $v = 1$.

Категория называется *категорией без кручения*, если $\alpha^n = 1$, для $\alpha \in Mor(\mathbb{C})$ и $n > 0$, влечет $\alpha = 1$.

Теорема 4.6 *[71] Предположим, что* $\mathbb{C}$ *– категория без кручения, допускающая слабые сокращения. Тогда* $\dim_K\mathbb{C} \leq 1$*, если и только если* $\mathbb{C}$ *частично свободна.*

Открытая проблема 4.2 *[139] Пусть* $\mathbb{C}$ *– малая категория размерности Хохшильда–Митчела 1, не имеющая идемпотентов, кроме тождественных. Будет ли* $\mathbb{C}$ *категорией частных свободной категории?*

4.3 Размерность Хохшильда–Митчела частично упорядоченных множеств

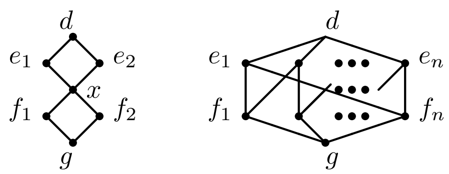
Пусть $\mathbb{C}$ – ч. у. множество. Каждое ч. у. множество является дельтой, значит $\dim_K \mathbb{C} = 0$ в тех и только тех случаях, когда $\mathbb{C}$ дискретно, и $\dim_K \mathbb{C} \leq 1$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}$ изоморфно свободной категории.

Локально конечные множества размерности 2. Под *локально конечным множеством* мы подразумеваем ч. у. множества, все интервалы $[a, b]$ которых конечны. Используя [29, Следствие 4.3] вместе с соотношениями $\dim_K \mathbb{C} = sup\{\dim_K [a, b] : a, b \in \mathbb{C}\}$ и gl.dim $Ab^{\mathbb{C}} = sup\{\text{gl.dim}\, Ab^{[a,b]} : a, b \in \mathbb{C}\}$ [140], имеем

$$\text{gl.dim}\, Ab^{\mathbb{C}} = 1 + \dim \mathbb{C},$$

для произвольного локально конечного множества $\mathbb{C}$.

(Надстроечная) n–корона [135] $\hat{\mathbf{C}}_n$ при $n \geq 2$ состоит из $2n+2$ элементов $\{d, e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n, g\}$ упорядоченных соотношениями $d < e_i < f_i < g$ при $1 \leq i \leq n$, $e_i < f_{i-1}$ при $2 \leq i \leq n$, и $e_1 < f_n$. *Цифра 8* получается из 2-короны $\hat{\mathbf{C}}_2$ добавлением x с соотношениями $e_1 < x < f_1, e_2 < x < f_2$.



цифра 8 $\qquad$ n–корона $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}$

Нетрудно показать, что $\dim \mathbb{C} \geq 3$ для любого ч. у. множества $\mathbb{C}$, содержащего $\hat{\mathbf{C}}_n$ как полную подкатегорию, $n \geq 3$. Если $\mathbb{C}$ содержит $\hat{\mathbf{C}}_2$ как полную подкатегорию, но не содержит вместе с ней цифру 8, то $\hat{\mathbf{C}}_2$ – ретракт $\mathbb{C}$, и снова $\dim \mathbb{C} \geq 3$. Будем говорить, что $\mathbb{C}$ *содержит корону*, если оно содержит $\hat{\mathbf{C}}_n$ как полную покатегорию для некоторого $n \geq 2$, с описанным выше дополнительным условием в случае $n = 2$.

Пусть $\mathbb{C}$ – локально конечное множество. Тогда неравенство $\dim \mathbb{C} \leq 2$ равносильно gl.dim $Ab^{\mathbb{C}}$ – gl.dim $Ab \leq 2$. Отсюда, согласно [61], неравенство $\dim \mathbb{C} \leq 2$ имеет место тогда и только тогда, когда не существует такого $n \geq 2$, при котором $\mathbb{C}$ содержало бы надстроечную корону $\hat{\mathbf{C}}_n$.

Размерность произведения.

Теорема 4.7 *Пусть $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$ – локально конечные множества. Тогда неравенство*

$$\dim \mathbb{C} \times \mathbb{D} < \dim \mathbb{C} + \dim \mathbb{D}$$

будет строгим, если и только если выполнены следующие 2 условия:

1) $3 < \dim \mathbb{C} < \infty, 3 < \dim \mathbb{D} < \infty,$

2) для всех $a < b$ в $\mathbb{C}$ и $x < y$ в $\mathbb{D}$, при $p = \dim \mathbb{C} - 2$ и $q = \dim \mathbb{D} - 2$, группы $H_p(]a,b[)$ и $H_q(]x,y[)$ равны 0, а группы $H_{p-1}(]a,b[)$ и $H_{q-1}(]x,y[)$ не содержат элементов одинакового порядка.

Митчел первым привел примеры, когда эти неравенства строгие.

Локально конечные множества размерности 3. Пусть $\mathbb{C}$ – локально конечное множество, $\mathcal{A}$ – категория, $A \in \mathcal{A}$ – объект. Определим функтор $A\,\mathbb{C} : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ как принимающий значения $A\,\mathbb{C}(a,b) = A$, при $a \le b$, и $A\,\mathbb{C}(a,b) = 0$ – в других случаях. В [135] Митчел доказал, что если $\mathbb{C} = \hat{\mathbf{C}}_n$ – надстроечная n-корона, $n \ge 2$, то $pdA\,\mathbb{C} = 3 + pdA$. В [137] он предположил, что это равенство остается справедливым для любого локально конечного множества размерности $\dim \mathbb{C} = 3$. Эта догадка была подтверждена в [33]:

Теорема 4.8 *Пусть $\mathbb{C}$ – локально конечное множество размерности Хохшильда–Митчела 3, $\mathcal{A}$ – абелева категория, A – объект из $\mathcal{A}$. Тогда*

$$pdA\,\mathbb{C} = 3 + pdA$$

Контрпримеры. Существуют примеры сюръективных неубывающих отображений решеток $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$, для которых $\dim \mathbb{C}_1 < \dim \mathbb{C}_2$ [29].

4.4 Размерность Хохшильда–Митчела линейно упорядоченных множеств

Пусть $\mathbb{C}$ – ч. у. множество. Тогда категория факторизаций $\mathbb{C}'$ изоморфна множеству замкнутых интервалов $[a,b] = \{x \in \mathbb{C} : a \le x \le b\}$, упорядоченному с помощью отношения включения "$\subseteq$".

Митчел доказал в [137], что если $\mathbb{C}$ – линейно упорядоченное множество, все замкнутые интервалы которого имеют мощности не больше $\aleph_n$, то

$$\dim_K \mathbb{C} \le n + 2$$

В частности, упорядоченное множество рациональных чисел имеет размерность ≤ 2.

Вполне упорядоченные множества. Пусть ω_n – наименьший ординал мощности $\aleph_n$. Митчел [137] вычислил $\dim \mathbb{C}$ для всех ординалов $\mathbb{C}$, кроме ординалов ω_1, ..., ω_n , ...

Герман Брюне вычислил размерности $\dim \omega_n$, при всех $n \in \mathbf{N}$. Он доказал, что $\dim_K \omega_n = n + 1$ [56].

Теорема 4.9 *[140] Пусть K – коммутативное кольцо с 1, α – ординал мощности $\aleph_n$. Тогда $\dim_K \alpha = n + 2$, если $\alpha > \omega_n$, и $\dim_K \alpha = n + 1$, при $\alpha = \omega_n$.*

Множество рациональных чисел содержит $\omega_0 + 1$ как ретракт, значит оно имеет размерность 2.

Плотность. Пусть $\mathbf{R}$ обозначает упорядоченное множество вещественных чисел. Митчел поставил проблему – вычислить $\dim \mathbf{R}$. Эта проблема была решена Станиславом Бальцержиком [41]. Он сконструировал проективную резольвенту

$$0 \to T_3 \stackrel{d_3}{\to} T_2 \stackrel{d_2}{\to} T_1 \stackrel{d_1}{\to} T_0 \longrightarrow K\mathbf{R}(-,=) \to 0$$

в категории $Mod_K^{\mathbf{R}^{op}\times\mathbf{R}}$ и показал, что мономорфизм d_3 не расщепляем. Это дало следующий ответ на вопрос Митчела:

Теорема 4.10 *Размерность Хохшильда–Митчела* $\dim_K \mathbf{R}$ *упорядоченного множества вещественных чисел равна 3, для всякого коммутативного кольца* K *с 1.*

Митчел [137] поставил вопрос, будет ли свойство счетности характеризовать линейно упорядоченные множества размерности ≤ 2? Для подмножеств вещественных чисел это было доказано в [26]:

Теорема 4.11 *Пусть* $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{R}$ *– такое подмножество вещественных чисел, что* $2^{\aleph_0} < 2^{|\mathbb{C}|}$*. Тогда* $\dim \mathbb{C} = 3$.

В частности, если $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{R}$ и $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$, то $\dim \mathbb{C} = 3$. В предположении $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ размерность каждого несчетного $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{R}$ равна 3.

Открытая проблема 4.3 *Пусть* $\mathbb{C}$ *– линейно упорядоченное множество размерности* $\dim \mathbb{C} \leq 2$*. Доказать, что* $|[a,b]| \leq \aleph_0$ *для всех замкнутых интервалов* $[a,b]$ *в* $\mathbb{C}$*.*

В [26] было установлено, что $\dim$ не убывает на классе всех линейно упорядоченных множеств, упорядоченном с помощью отношения включения:

Теорема 4.12 *Пусть* $\mathbb{C}$ *– линейно упорядоченное множество. Тогда для любого подмножества* $X \subseteq \mathbb{C}$ *имеет место неравенство* $\dim X \leq \dim \mathbb{C}$.

Определение 4.4 *Пусть* $\mathbb{C}$ *– линейно упорядоченное множество. Подмножество* $I \subseteq \mathbb{C}$ *называется полуплотным, если оно имеет непустое пересечение с каждым замкнутым интервалом, содержащим по крайней мере два элемента.*

В [27] вычислена размерность линейно упорядоченных множеств $\mathbb{C}$, содержащих такие полуплотные подмножества $I \subseteq \mathbb{C}$, что $|I| < |\mathbb{C}|$:

Теорема 4.13 *Пусть* $I \subset \mathbb{C}$ *– полуплотное подмножество линейно упорядоченного множества, и пусть* $|\mathbb{C}| > |I| = \aleph_n$*, при некотором* $1 \leq n < \infty$*. Если* $\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}$ *и* $2^{\aleph_n} < 2^{|\mathbb{C}|}$*, то* $\dim \mathbb{C} = n+3$ *и* $\dim I = n+2$.

Митчел пытался вычислить размерности всех линейно упорядоченных множеств:

Гипотеза 4.5 *(Общая гипотеза Митчела) Пусть* $\mathbb{C}$ *– линейно упорядоченное множество. Тогда* $\dim \mathbb{C} = n+2$, *где* $\aleph_n = sup\{|[a,b]| : a,b \in \mathbb{C}\}$.

Лексикографически упорядоченное множество $C_n = \{0,1\}^{\omega_n}$ содержит полуплотное подмножество

$$H_n = \{\varphi : \omega_n \to \{0,1\} : (\exists \beta < \omega_n)\ (\varphi(\beta) = 1\ \ \varphi(\alpha) = 0\ \ \alpha > \beta)\}.$$

Значит, в случае $2^{\aleph_{n-1}} > \aleph_n$ будут иметь место равенства $\dim C_n = n+3$, $\dim H_n = n+2$. Выбирая наименьший n, удовлетворяющий $2^{\aleph_n} > \aleph_{n+1}$, получаем $\dim C_n = n+3$ и $|C_n| > \aleph_{n+1}$. Отсюда получаем доказанное впервые в работе [25]

Следствие 4.14 *Если существует* n, *для которого* $2^{\aleph_n} > \aleph_{n+1}$, *то общая гипотеза Митчела неверна.*

В [27] найдены утверждения о размерности Хохшильда–Митчела, равносильные теоретико множественным аксиомам:

Теорема 4.15 *Следующие предположения эквивалентны:*
(CH_ω) для всех натуральных чисел $n \geq 0$ *справедливы равенства* $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$*;*
(D) если линейно упорядоченное множество $\mathbb{C}$ *содержит такое полуплотное подмножество* I, *что* $|\mathbb{C}| > |I| = \aleph_n$, *то* $\dim \mathbb{C} = n+3$.

Открытая проблема 4.6 *Будет ли общая гипотеза Митчела эквивалентна (CH_ω)?*

(По следствию 4.14 импликация "$\Rightarrow$"верна.)

4.5 Когомологии алгебраических теорий

Джибладзе и Пирашвили [114] обобщили когомологии Маклейна колец на алгебраические теории. *Алгебраической теорией* $\mathbb{A}$ называется категория, с множеством объектов $Ob\,\mathbb{A} = \{A^n : n \in \mathbf{N}\}$, где $A^n = A^1 \times \cdots \times A^1$, при $n \in \mathbf{N}$, обозначают n-кратные произведения A^1 на себя. В частности, A^0 – терминальный объект в $\mathbb{A}$. $\mathbb{A}$-*алгеброй* в категории $\mathcal{A}$ называется функтор $\mathbb{A} \to \mathcal{A}$, сохраняющий конечные произведения. Категория $\mathbb{A}$-алгебр в Ens и естественных преобразований обозначается через $\mathbb{A}^b$. Вложение Ионеды индуцирует полное вложение $I_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^{op} \to \mathbb{A}^b$, значениями которого $I_{\mathbb{A}}(A^n)$ будут в точности свободные алгебры, порожденные n элементами. Таким образом, произвольная алгебраическая теория $\mathbb{A}$ эквивалентна дуальной к полной подкатегории из $\mathbb{A}^b$, состоящей из конечно-порожденных свободных $\mathbb{A}$-алгебр. Например, если $\mathbb{A}$ – алгебраическая теория абелевых групп, то $\mathbb{A}^{op}$ будет категорией с объектами 0, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^2$, $\mathbf{Z}^3$, ... , ее морфизмы $\mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z}^n$, будут задаваться целочисленными $m \times n$ матрицами.

Пусть $\mathbb{A}$ – алгебраическая теория. Обозначим через $Ab(\mathbb{A}^b)$ категорию $\mathbb{A}$-алгебр в Ab. Пусть $U : Ab \to Ens$ – забывающий функтор. Рассмотрим функтор $Ab(\mathbb{A}^b) \to \mathbb{A}^b$, действующий как $X \mapsto U \circ X$. Он имеет левый сопряженный $(-)_{ab} : \mathbb{A}^b \to Ab(\mathbb{A}^b)$.

Определение 4.7 *[114] Пусть $\mathbb{A}$ – алгебраическая теория, $T : \mathbb{A}^{op} \to Ab(\mathbb{A}^b)$ – функтор. Когомологии $\mathbb{A}$ с коэффициентами в T определяются по формуле*

$$H^*(\mathbb{A}, T) = \mathrm{Ext}^*((I_{\mathbb{A}})_{ab}, T),$$

где $(I_{\mathbb{A}})_{ab}$ – композиция

$$\mathbb{A}^{op} \xrightarrow{I_{\mathbb{A}}} \mathbb{A}^b \xrightarrow{(-)_{ab}} Ab(\mathbb{A}^b).$$

Для функтора $T : \mathbb{A}^{op} \to Ab(\mathbb{A}^b)$, обозначим через $\tilde{T} : \mathbb{A} \times \mathbb{A}^{op} \to Ab$ функтор, для которого $\tilde{T}(A^n, A^m) = T(A^n)(A^m)$.

Предложение 4.16 *[114] Пусть $\mathbb{A}$ – алгебраическая теория, $T : \mathbb{A}^{op} \to Ab(\mathbb{A}^b)$ – функтор. Тогда существуют изоморфизмы*

$$H^*(\mathbb{A}, T) \cong H^*(\mathbb{A}^{op}, \tilde{T}),$$

где $H^n(\mathbb{A}^{op}, \tilde{T})$ – когомологии Хохшильда–Митчела категории $\mathbb{A}^{op}$ с коэффициентами в $\tilde{T}$.

Пусть Th – категория алгебраических теорий, в которой морфизмами служат сохраняющие произведения и биективные на объектах функторы. Обозначим $Ens^\omega = \prod_{n \in \mathbf{N}} Ens_n$, где $Ens_n = Ens$. Рассмотрим функтор $\Omega : Th \to Ens^\omega$, определенный по формуле $\Omega(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}(A^n, A^1)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Известно [174], что Ω имеет некоторый левый сопряженный L. Теория $\mathbb{A}$ называется *свободной*, если существует такой объект P в Ens^ω, что $\mathbb{A} \cong L(P)$. В работе [114] доказано, что если $\mathbb{A}$ – свободная алгебраическая теория, то $H^n(\mathbb{A}, -) = 0$, при $n \geq 2$.

В случае, когда $\mathbb{A}^b$ – категория R-модулей над кольцом с 1, когомологии алгебраической теории изоморфны когомологиям Маклейна [114]

$$H^*(R, M) \cong \mathrm{Ext}^*(I, M \otimes_R (-)),$$

где I – вложение категории $\mathcal{F}$ свободных конечно–порожденных левых R-модулей в Mod_R, а Ext^n рассматриваются в категории функторов $\mathcal{F} \to Mod_R$.

В [157] получены и применены соответствующие выражения для гомологий Маклейна. В работе [54] были найдены другие приложения гомологий функторов $T : \mathbb{A} \times \mathbb{A}^{op} \to Ab$, где $\mathbb{A}$ – алгебраическая теория R-модулей над кольцом R с 1.

5 Глобальная размерность категории функторов

Эта часть содержит информацию о группах расширений в категории функторов. Мы начинаем со спектральной последовательности, сходящейся к группам расширений функторов. Затем переходим к обобщениям классических теорем, принадлежащих Гильберту и Машке. Потом мы рассматриваем обобщения теоремы Квиллена–Суслина на предаддитивные категории. Последний раздел посвящен глобальной размерности категории функторов, определенных на линейно упорядоченных и конечных частично упорядоченных множествах.

5.1 Глобальная размерность категории модулей

Объект $A \in \mathcal{A}$ называется *малым*, если $h^A = \mathcal{A}(A,-)$ сохраняет копроизведения. Объект A называется *унивалентным* (или *образующим*), если h^A унивалентен. Более общим образом, семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ объектов $A_i \in Ob\mathcal{A}$ называется *унивалентным* или *множеством образующих*, если объект $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ унивалентен. Фрейд охарактеризовал категории аддитивных функторов $Add(C, Ab)$ как абелевы категории с копроизведениями и унивалентным множеством малых проективных объектов.

Под *кольцоидами* подразумеваются произвольные малые предаддитивные категории. Если существует такой кольцоид C, что $\mathcal{A} \cong Add(C, Ab)$, то $\mathcal{A}$ называется *обобщенной категорией модулей*, а ее объекты — *C–модулями*. Обозначим $Mod_C = Add(C, Ab)$.

Пусть C – кольцоид. Точное вложение $I : Mod_C \to Ab^C$ индуцирует некоторые морфизмы $I_n : \mathrm{Ext}^n(T,F) \to \mathrm{Ext}^n(I(T), I(F))$ для любых $T, F \in Mod_C$. Для всякого функтора $G : C \to Ab$ композиция $C \xrightarrow{G} Ab \xrightarrow{U} Ens \xrightarrow{L} Ab$ будет аддитивным функтором. Значит, аугментация $LUG \to G$ принадлежит Mod_C и индуцирует гомоморфизмы

$$\mathrm{Ext}^n(I(T), I(F)) \to \mathrm{Ext}^n(LUI(T), I(F)).$$

Пирашвили в [156] доказал, что композиция

$$\mathrm{Ext}^n(T,F) \xrightarrow{I_n} \mathrm{Ext}^n(I(T), I(F)) \to \mathrm{Ext}^n(LUI(T), I(F))$$

является изоморфизмом для всех $n \in \mathbf{N}$, и $T, F \in Mod_C$. Таким образом, расширения в категории модулей можно изучать как расширения в категории (неаддитивных) функторов.

Группы расширений функторов. В работах [3] и [114] была построена спектральная последовательность, сходящаяся к группам расширений $\mathrm{Ext}^n(F,G)$ для функторов $F, G : \mathbb{C} \to Mod_R$, где R – кольцо с 1, а $\mathbb{C}$ – малая категория. В работе [24] эта спектральная последовательность обобщена для произвольной абелевой категории с достаточным числом проективных объектов.

Для произвольного множества E мы называем E-копроизведением функтор $\mathcal{A}^E \to \mathcal{A}$, переводящий каждое семейство $\{A_e\}_{e\in E}$ в $\sum_{e\in E} A_e$.

Теорема 5.1 *[24] Пусть $\mathbb{C}$ – малая категория, $\mathcal{A}$ – абелева категория с $Ob\,\mathbb{C}$-копроизведениями и $Ob(\mathbb{C}/c)$-копроизведениями для всех $c \in Ob\,\mathbb{C}$, P*

– собственный класс точных последовательностей в $\mathcal{A}$, в смысле [125], для которых $\mathcal{A}$ имеет достаточно P-проективных объектов, и для каждого $c \in Ob\,\mathbb{C}$ функтор $Ob(\mathbb{C}/c)$-копроизведения переводит всякое семейство P-эпиморфизмов в P-эпиморфизм. Тогда для любых функторов $F, G : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ существует спектральная последовательность первой четверти

$$E_2^{p,q} = \lim{}^p_{\mathbb{C}'}\{\mathrm{Ext}^q_P(F(\mathrm{dom}\,\alpha), G(\mathrm{cod}\,(\alpha)))\} \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathbb{C}\,P}(F, G)$$

где $\mathbb{C}\,P$ – собственный класс в $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, состоящий из точных последовательностей $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, для которых последовательности $0 \to F'(c) \to F(c) \to F''(c) \to 0$ принадлежат P при всех $c \in Ob\,\mathbb{C}$.

С помощью принадлежащего Митчелу [134] условия сохранения значений Ext в работе [24] доказано, что если все категории $\mathbb{C}/c$ конечны, то эта спектральная последовательность существует и в случае произвольных абелевой категории $\mathcal{A}$ и собственного класса P.

Глобальная размерность. Пусть $mod_{fp}R$ – категория конечно-представимых правых R–модулей над кольцом R с 1. В теории представлений и в других разделах теории колец бывает необходимо рассматривать категории $D(R) = Add(mod_{fp}R, Ab)$ и $L(R) = Add((mod_{fp}R)^{op}, Ab)$. Иенсен показал [112], что коммутативные нетеровы кольца R, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{gl.dim}\,D(R) \leq 2$, будут в точности артиновыми кольцами главных идеалов (или кольцами Кёте). Брюне в [59] показал, что коммутативные нетеровы кольца R глобальной размерности $\mathrm{gl.dim}\,L(R) \leq 2$ будут в точности конечными произведениями $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ колец, каждое из которых является кольцом Кёте или дедекиндовой областью.

Из этого результата, вместе с [112, Следствие 1], вытекает, например, что $\mathrm{gl.dim}\,D(\mathbf{Z}) = 3$ и $\mathrm{gl.dim}\,L(\mathbf{Z}) = 2$. В противоположность этому примеру, если R – артинова алгебра, то $\mathrm{gl.dim}\,D(R) = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{gl.dim}\,L(R) = 2$.

Напомним, что модуль называется *чисто проективным*, если он является прямым слагаемым прямой суммы конечно-представимых модулей. В [59] доказано, что если R – нетерово справа кольцо, удовлетворяещее $\mathrm{gl.dim}\,L(R) \leq 2$, то каждый подмодуль чисто проективного правого R-модуля чисто проективен.

Чистая глобальная размерность. Пусть C – кольцоид. *Тензорным произведением* $\otimes : Mod_{C^{op}} \times Mod_C \to Ab$ называется функтор, аддитивный по каждому аргументу и определенный изоморфизмами

$$Ab(G \otimes F, A) \cong Mod_{C^{op}}(G, h_A \circ F),$$

естественными по $G \in Mod_{C^{op}}$, $F \in Mod_C$ и $A \in Ab$, где $h_A = C(-, A)$. Напомним, что *правый C-модуль* есть в точности левый C^{op}–модуль. Пусть F – левый C-модуль. Если существуют конечное множество I, семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ объектов $A_i \in Ob\,C$ и эпиморфизм $\lambda : \sum\limits_{i \in I} h^{A_i} \to F$, то F называется *конечно-порожденным.* Если существует точная последовательность

$$F_1 \to F_0 \to F \to 0$$

с конечно-порожденными C-модулями F_0 и F_1, то мы называем F *конечно-представимым.* Следуя Стенстрёму [178], будем называть точную последовательность $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ в категории Mod_C *чистой*, если для каждого $G \in Mod_{C^{op}}$ индуцированная последовательность

$$0 \to G \otimes F' \to G \otimes F \to G \otimes F'' \to 0$$

точна. Объект $M \in Mod_C$ будет *чисто проективным*, если существует конечно-порожденный C-модуль P вместе с ретракцией $P \to M$. *Чистой проективной размерностью $p.proj.M$* левого C-модуля M называется нижняя грань длин чистых точных резольвент M, из чисто проективных левых C-модулей. *Чистая левая глобальная размерность* кольцоида C определяется по формуле

$$\text{l.p.gl.dim}\; C = sup\{p.proj.dimM : M \in Mod_C\}.$$

Положим r.p.gl.dim $C =$ l.p.gl.dim C^{op}.

Пусть K – поле, I – линейно упорядоченное множество. Обозначим через $K[I]$ кольцоид, определенный естественным изоморфизмом $Mod_K^I \cong Mod_{K[I]}$ категорий. Брюне в [58] доказал, что для линейно упорядоченного множества I равенство $\text{l.p.gl.dim}\, K[I] = 0$ будет иметь место тогда и только тогда, когда I вполне упорядочено. Митчел [137] установил, что понятия левой и правой полупростоты, обобщенные на кольцоиды, совпадают. Тем не менее, Брюне доказал, что это неверно для чистых глобальных размерностей:

Теорема 5.2 *[58] Пусть K – поле мощности $\le \aleph_0$, n – ординал. Тогда*

(1) $\text{l.p.gl.dim}\, K[\aleph_n] = 0$ *;*
(2) $\text{r.p.gl.dim}\, K[\aleph_n] = n + 1$*, при* $n < \aleph_0$*;*
(3) $\text{r.p.gl.dim}\, K[\aleph_n] = \infty$*, при* $n \ge \aleph_0$.

В связи с чистой размерностью К. У. Иенсен упомянул о знаменитой (все еще открытой) проблеме, будет ли чистая левая глобальная размерность кольца равна 0, если и только если его правая глобальная размерность нулевая. Этот и аналогичный вопросы обсуждаются в [113].

5.2 Категории размерности 1

Заметим, что если $\mathbb{C}$ – моноид, то категория $Mod_R^{\mathbb{C}}$ для любого кольца R с 1 эквивалентна $Mod_{R\mathbb{C}}$, где $R\mathbb{C}$ – моноидная алгебра. Рассмотрим следующий классический результат:

Теорема Гильберта о цепях сизигий. Пусть $\mathbf{N}$ – аддитивный моноид натуральных чисел. Теорема Гильберта [97] утверждает, что для произвольных поля K и целого числа $m \ge 1$

$$\text{gl.dim}\, Mod_K^{\mathbf{N}^m} = m,$$

где $\mathbf{N}^m$ — m-кратное декартово произведение $\mathbf{N}$ на себя. Это утверждение можно получить с помощью индукции из равенства $\mathrm{gl.dim}\, Mod_R^{\mathbf{N}} = 1 + Mod_R$, верного для любого кольца R с 1. Митчел сделал следующее обобщение:

Теорема 5.3 [139] *(Обобщенная теорема о сизигиях) Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными копроизведениями, и пусть $\mathbb{C}$ – частично свободная категория, не эквивалентная никакой дискретной. Тогда*

$$\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}^{\mathbb{C}} = 1 + \mathrm{gl.dim}\, \mathcal{A}.$$

Справедливо следующее обращение обобщенной теоремы о сизигиях [70].

Пусть R – кольцо с 1, M – моноид. Ясно, что если M равен $(\prod_{i=1}^n M_i) \times H$, для некоторых M_i, изоморфных аддитивной группе $\mathbf{Z}$ или аддитивному моноиду $\mathbf{N}$, где H – конечная группа со свойством $|H|R = R$, то

$$\mathrm{gl.dim}\, Mod_R^M = n + \mathrm{gl.dim}\, Mod_R.$$

Теорема 5.4 *[70] Пусть K – такое коммутативное нетерово кольцо с 1, что $\mathrm{gl.dim}\, Mod_K < \infty$. Если M – такой конечно-порожденный коммутативный моноид с сокращениями, что $\mathrm{gl.dim}\, Mod_K^M = n + \mathrm{gl.dim}\, Mod_K$, то M изоморфен $(\prod\limits_{i=1}^{n} M_i) \times H$, где M_i изоморфны $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{N}$, и H – конечная группа, обладающая свойством $|H|K = K$.*

Тем самым вычислена глобальная размерность категории Mod_K^M в случае конечно-порожденного коммутативного моноида M и коммутативного нетерова кольца K конечной глобальной размерности. Эта теорема также позволяет охарактеризовать все конечно-порожденные коммутативные моноиды M размерности $dim_K M = n$.

Наследственные дельты. Пусть R – кольцо с 1. Малая категория $\mathbb{C}$ называется *R-наследственной*, если $\mathrm{gl.dim}\, Mod_R^{\mathbb{C}} \le 1$. В [71] решена проблема характеризации всех малых категорий $\mathbb{C}$ со слабыми сокращениями и без кручения, у которых обе из $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^{op}$ являются R-наследственными. Эта проблема была решена Хёпнером [100] в случае, когда $\mathbb{C}$ – категория со слабыми сокращениями и с конечными hom-множествами. Напомним, что малая категория называется *жесткой*, если равенства $xy = x'y'$ при некоторых x, y, x' и y' влекут выполнение либо $x = x'z$, либо $x' = xz$, для некоторого морфизма z.

Теорема 5.5 *[72] Пусть $\mathbb{C}$ – недискретная дельта, R – кольцо с 1. Тогда $\mathbb{C}$ будет R-наследственной, если и только если мускулы $\mathbb{C}$ допускают сокращения, являются жесткими и удовлетворяют DCC, а R – кольцо глобальной размерности 0.*

Если для каждой последовательности морфизмов α_1, α_2, ..., удовлетворяющей $\mathrm{dom}\, \alpha_i = \mathrm{cod}\, \alpha_{i+1}$ для всех i, существует k, при котором все α_i с индексами $i > k$ являются изоморфизмами, то мы будем говорить, что $\mathbb{C}$ имеет свойство *слабого DCC*.

Категория $\mathbb{C}$ называется *локально артиновой*, если для каждого $c \in \mathbb{C}$ категория $c/\mathbb{C}$ имеет слабое DCC.

Теорема 5.6 *[100] Для категории со слабыми сокращениями $\mathbb{C}$, у которой все множества $\mathbb{C}(a, b)$ конечны, равносильны следующие условия:*

(1) $\mathrm{gl.dim}\, Mod_R^{\mathbb{C}} \le 1 + \mathrm{gl.dim}\, Mod_R$ *для каждого кольца R, при котором $\mathbb{C}$ не имеет R-кручения;*

(2) $\mathrm{gl.dim}\, Mod_R^{\mathbb{C}} \le 1$ *для некоторого полупростого кольца R;*

(3) $\mathbb{C}$ – жесткая и локально артинова.

Слабая глобальная размерность категории модулей. Левый модуль M называется *плоским*, если функтор $(-)\otimes_C M$ точен. Обычным образом, с помощью проективной резольвенты объекта E или M, определяются функторы $Tor_n^C(E, M)$. *Слабая* (или *плоская*) размерность E определяется по формуле

$$\mathrm{w.d.}\, E = sup\{k : Tor_k^C(E, -) \neq 0\},$$

или, равносильно, как длина самой короткой из плоских резольвент объекта E.

Слабой глобальной размерностью $\mathrm{w.gl.dim}\, Mod_C$ называется верхняя грань чисел $\mathrm{w.d.}\, M$, где $M \in Mod_C$.

Брюне [57] охарактеризовал ч. у. множества $\mathbb{C}$, такие что

$$\mathrm{w.gl.dim}\, \mathcal{A}^{\mathbb{C}} - \mathrm{w.gl.dim}\, \mathcal{A} \le 1$$

для всех обобщенных категорий модулей $\mathcal{A}$.

Деревом называется ч. у. множество, все замкнутые интервалы которого линейно упорядочены.

Теорема 5.7 *[57] Равенства* $\mathrm{w.gl.dim}\, \mathcal{A}^{\mathbb{C}} = 1 + \mathrm{w.gl.dim}\, \mathcal{A}$ *справедливы для всех обобщенных категорий модулей $\mathcal{A}$, если и только если $\mathbb{C}$ – недискретное дерево.*

Напомним, что кольцо R с 1 называется *кольцом фон Неймана*, если каждый левый R-модуль является плоским. Хёпнер изучал слабую глобальную размерность категории функторов на дельте со слабыми сокращениями.

Теорема 5.8 *[100] Для категории $\mathbb{C}$ со слабыми сокращениями, у которой все моноиды $\mathbb{C}(c, c)$ конечны, равносильны следующие условия:*

(1) $\mathrm{w.gl.dim}\, Mod_R^{\mathbb{C}} \le 1 + \mathrm{w.gl.dim}\, Mod_R$ *для каждого кольца R, такого что $\mathbb{C}$ не имеет R-кручения;*

(2) $\mathrm{w.gl.dim}\, Mod_R^{\mathbb{C}} \le 1$ *для некоторого регулярного кльца фон Неймана R;*

(3) $\mathbb{C}$ – жесткая.

5.3 Глобальная размерность группового кольца

Теорема Машке. Рассмотрим теперь другой классический результат. Как и выше, $C(\mathcal{A})$ обозначает центр абелевой категории $\mathcal{A}$.

Теорема 5.9 *Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория, G – конечная группа. Если порядок группы G обратим в $C(\mathcal{A})$, то* $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^G = \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$. *В других случаях* $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^G = \infty$.

Следствие 5.10 *(Машке)*

Если G – конечная группа, а K – поле, характеристика которого не делит ее порядок, то K–алгебра $K(G)$ полупроста.

Глобальная размерность категории G–объектов над абелевой группой G. Митчел установил, что если G – конечно-порожденная абелева группа, подгруппа кручения которой имеет порядок n, а $\mathcal{A}$ – абелева категория с точными счетными произведениями или копроизведениями, то

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^G = r(G) + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A},$$

когда n – обратимый элемент в $C(\mathcal{A})$, и $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^G = \infty$ – в других случаях. Более общим образом, верна

Теорема 5.11 *[133] Пусть G – абелева группа ранга r, и предположим, что $\mathcal{A}$ имеет точные произведения или копроизведения по множествам мощности $|G|$. Тогда*

$$r + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A} \leq \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^G.$$

Пусть P – множество простых p, для которых G имеет p-кручение. Если p не обратимо в $C(\mathcal{A})$ при некотором $p \in P$, то $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^G = \infty$. *С другой стороны, если p – обратимые элементы в $C(\mathcal{A})$ для всех $p \in P$, и если, сверх того, G – счетная, то*

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^G \leq 1 + r + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}.$$

Митчел поставил вопрос в [133]:

Будет ли условие счетности необходимым в теореме 5.11? Более конкретный вопрос, существуют ли такие кольцо R и несчетная периодическая абелева группа G, что

$$1 + \mathrm{gl.dim}\,Mod_R < \mathrm{gl.dim}\,Mod_R^G < \infty?$$

Ответ был дан Н. Ченом [60]. Немного позже Б.Ософская [153] дала другое доказательство.

Теорема 5.12 *[153] Пусть G – периодическая абелева группа мощности $|G| = \aleph_k \geq \aleph_0$. Если K – поле, в котором обратимы порядки всех элементов группы G, то* $\mathrm{gl.dim}\,Mod_K^G = k + 1$.

Рассмотрим, например, $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{|I|}$, где p – простое число. Пусть K – поле характеристики $char K \neq p$. В случае $2^{|I|} = \aleph_k, |I| \geq \aleph_0$, справедливо равенство

$$\mathrm{gl.dim}\, Mod_K^G = k + 1.$$

Значит, если $2^{\aleph_0} = \aleph_k$, $k < \infty$, то

$$1 + \mathrm{gl.dim}\, Mod_K < \mathrm{gl.dim}\, Mod_K^G = k + 1 < \infty.$$

Следовательно, ответы на оба вопроса Митчела положительны.

5.4 Проективно свободные кольцоиды

Кольцоид C называется *проективно свободным*, если каждый проективный C–модуль свободен. Например, по известной теореме Квиллена и Суслина, для произвольного свободного коммутативного конечно-порожденного моноида $\mathbb{C}$ и поля K кольцо $K\,\mathbb{C}$ будет проективно свободным.

Локальные кольцоиды. Кольцоид C называется локальным, если каждый представимый функтор $C(a, -) : C \to Ab$ имеет единственный максимальный идеал. Как и в случае колец, C локален тогда и только тогда, когда C^{op} локален. Митчел обобщил теорему Капланского и получил:

Теорема 5.13 *Локальные кольцоиды проективно свободны.*

Следствие 5.14 *Если K – тело, а $\mathbb{C}$ ч. у. множество, то кольцоид $K\,\mathbb{C}$ проективно свободен.*

Кольцоиды над ч. у. множествами. Ченг и Митчел [61, Следствие 3] доказали, что если ч. у. множество $\mathbb{C}$ имеет DCC и если кольцо R с 1 проективно свободно, то $R\,\mathbb{C}$ – проективно свободный кольцоид. Они поставили вопрос, если $\mathbb{C}$ – произвольное ч. у. множество, то будет ли $\mathbf{Z}\,\mathbb{C}$ проективно свободным? Эта проблема была решена Хёпнером и Ленцингом [101]:

Теорема 5.15 *Пусть $\mathcal{A}$ – категория левых модулей над ненулевым кольцом R, $\mathbb{C}$ – ч. у. множество. Тогда каждый проективный объект категории $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ изоморфен копроизведению $\sum\limits_p A_p h^p$ для некоторых семейства объектов $p \in Ob\,\mathbb{C}$ и проективных объектов A_p из $\mathcal{A}$.*

Заметим, что Р. Уонг [183] обобщил результат Ченга и Митчела на DCC категории:

Теорема 5.16 *Пусть $\mathbb{C}$ – DCC категория. Тогда функтор $P : \mathbb{C} \to Mod_R$ проективен, если и только если он изоморфен функтору вида $\sum\limits_p A_p h^p$, где p пробегает некоторое семейство объектов из $\mathbb{C}$, а A_p – проективные R–модули.*

Открытая проблема 5.1 *[65] Неизвестно, необходимо ли условие DCC в теореме 5.16.*

Если R – поле, то условие DCC можно опустить [137, С. 89].

Фироиды. Кольцоид C называется имеющим *инвариантное базисное число* (ИБЧ), если любые два базиса (свободного) C–модуля имеют одинаковое число элементов. Если C имеет ИБЧ, то C^{op} также имеет ИБЧ. Если существует аддитивный функтор из кольцоида C в кольцоид $\mathcal{D}$, имеющий ИБЧ, то C имеет ИБЧ. В частности, если R – кольцо с ИБЧ, а $\mathbb{C}$ – произвольная малая категория, то $R\mathbb{C}$ имеет ИБЧ.

Если C имеет ИБЧ и если каждый левый идеал свободен, то C называется *левым фироидом.* Кольцоид C называется *правым фироидом*, если C^{op} – левый фироид. Он называется *двухсторонним фироидом*, если он левый и правый фироид. Легко видеть, что левые фироиды являются областями (то есть, $\beta\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = 0$). В частности, если $R\mathbb{C}$ – левый фироид, то $\mathbb{C}$ допускает сокращения.

Каждый левый фироид проективно свободен.

Полное описание двухсторонних фироидов вида $R\mathbb{C}$ дано Уонгом [184]. Левым (правым) кольцом свободных идеалов (в смысле Кона [75]) называется кольцо, в котором каждый левый (правый) идеал свободен.

Теорема 5.17 *Кольцоид $R\mathbb{C}$ является двухсторонним фироидом, если и только если $\mathbb{C}$ – частично свободная категория и R – тело, или $\mathbb{C}$ эквивалентна дискретной категории и R – двухстороннее кольцо свободных идеалов.*

Теорема 5.18 *Если $\mathbb{C}$ – нетривиальный моноид, то $R\mathbb{C}$ будет двухсторонним кольцом свободных идеалов, если и только если R – тело и $\mathbb{C}$ – частично свободен.*

5.5 Частично упорядоченные множества

Частично упорядоченные множества малых размерностей. Пусть полная решетка $\mathbb{L}$ содержится в качестве полной подкатегории в малой категории $\mathbb{C}$. Тогда можно определить отображение $F : \mathbb{C} \to \mathbb{L}$, полагая $F(c)$ равным нижней грани множества элементов из $\mathbb{L}$, больших или равных элемента c. Отображение F сохраняет порядок и его ограничение на $\mathbb{L}$ будет тождественным. Следовательно, $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \geq \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{D}}$ для любой абелевой категории $\mathcal{A}$. Отсюда вытекает

Теорема 5.19 *Если $\mathbb{C}$ – дискретное ч. у. множество, и $\mathcal{A}$ – абелева категория, то* $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$. *Если $\mathbb{C}$ не дискретна, то* $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \geq 1 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$, *для любой абелевой категории $\mathcal{A}$.*

Пусть **2** обозначает ч. у. множество, состоящее из элементов 0 и 1, упорядоченное с помощью $0 < 1$. Ясно, что $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}} = 2 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$. Значит, если ч. у. множество $\mathbb{C}$ содержит $\mathbf{2}\times\mathbf{2}$, то $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \geq 2 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$. Следуя Митчелу, в этом случае мы будем говорить, что $\mathbb{C}$ *содержит квадрат. Размерностью Крулля* ч. у. множества называется верхняя грань длин его цепей. Частично упорядоченное множество $\mathbb{C}$ будет свободным как категория, если и только если все его мускулы являются конечными линейно упорядоченными множествами. В этом случае $\mathbb{C}$ не содержит квадрат.

Теорема 5.20 *Если $\mathbb{C}$ – ч. у. множество, все мускулы которого имеют конечные размерности Крулля, и $\mathbb{C}$ не содержит квадрат, то*

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \leq 1 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A},$$

для всякой абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями.

Под *категорией Гротендика* мы будем подразумевать абелеву категорию с точными направленными копределами и с образующим.

Теорема 5.21 [140] *Пусть $\mathbb{C}$ – ч. у. множество. Тогда равенство*

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \leq 1 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$$

имеет место для всякой категории Гротендика с достаточным числом проективных объектов в том и только том случае, когда все замкнутые интервалы в $\mathbb{C}$ вполне упорядочены. Более того, равенство верно тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}$ – не дискретна.

Заметим, что в случае $\mathrm{gl.dim}\,Ab^{\mathbb{C}} \leq 1 + \mathrm{gl.dim}\,Ab$ ч. у. множество $\mathbb{C}$ будет деревом.

Частично упорядоченное множество, содержащее надстроечную корону. Нетрудно показать, что

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\hat{\mathbf{C}}_n} = 3 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}.$$

Так как $\hat{\mathbf{C}}_n$ – конечная решетка при $n \geq 3$, то

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\hat{\mathbf{C}}_n} \geq 3 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$$

для любого ч. у. множества $\mathbb{C}$, содержащего $\hat{\mathbf{C}}_n$ как полную подкатегорию, $n \geq 3$.

Теорема 5.22 *Если $\mathbb{C}$ – ч. у. множество, не содержащее корон, все замкнутые интервалы которого имеют конечную размерность Крулля, то*

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \leq 2 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A},$$

для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ с точными копроизведениями. С другой стороны, если $\mathbb{C}$ – произвольное ч. у. множество, содержащее корону, то

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \geq 3 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A},$$

для всякой абелевой категории $\mathcal{A}$.

Линейно упорядоченные множества. Брюне оценил сверху gl.dim $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, в случае, когда $\mathbb{C}$ – линейно упорядоченное множество, и $\mathcal{A}$ – категория модулей над коммутативным нетеровым кольцом с 1.

Пусть J – линейно упорядоченное множество. Подмножество $I \subseteq J$ называется *коинициальным*, если для каждого $x \in J$ существует такой $y \in I$, что $y \leq x$. *Коинициальностью* J называется нижняя грань мощностей коинициальных подмножеств.

Теорема 5.23 *[35] Пусть J – линейно упорядоченное множество, содержащее по крайней мере 2 элемента, K – коммутативное нетерово кольцо с 1. Если K – дедекиндова область или локальное кольцо, то*

$$\operatorname{gl.dim} Mod_K^J = n + 2 + \operatorname{gl.dim} Mod_K,$$

где $\aleph_n$ есть верхняя грань коинициальностей таких открытых подмножеств $U \subset J$, что $U \neq J$.

Заметим, что обобщение Митчела [137, Следствие 36.12] результатаОсофской [151, Следствие 7.5] на кольцоиды нормирования дает равенство

$$\operatorname{gl.dim} Mod_K^J = n + 2$$

лишь в случае, когда K – тело. Используя тонкий результат Басса [43], Брюне [57] доказал неравенство

$$\operatorname{gl.dim} Mod_K^J \leq n + 2 + \operatorname{gl.dim} Mod_K$$

для любого коммутативного нетерова кольца K.

Для упорядоченного множества вещественных чисел $\mathbf{R}$ получаем

$$\operatorname{gl.dim} Mod_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{R}} = 3.$$

Это дает ответ на вопрос Брюне [57].

Открытая проблема 5.2 *Пусть J – линейно упорядоченное множество, содержащее по крайней мере 2 элемента, K – коммутативное нетерово кольцо с 1. Доказать, что*

$$\operatorname{gl.dim} Mod_K^J = n + 2 + \operatorname{gl.dim} Mod_K,$$

где $\aleph_n$ – верхняя грань коинициальностей таких открытых подмножеств $U \subset J$, что $U \neq J$.

5.6 Глобальная размерность алгебр инцидентности

Когда категория $\mathbb{C}$ имеет только конечное число объектов, категория $Ab^{\mathbb{C}}$ будет эквивалентна категории $Mod_{\mathbf{Z}[\mathbb{C}]}$, где $\mathbf{Z}[\mathbb{C}]$ – кольцо инцидентности $\mathbb{C}$. Значит, вычисление относительной глобальной размерности $\mathbf{Z}[\mathbb{C}]$ можно свести к вычислению относительной глобальной размерности категории

$Ab^{\mathbb{C}}$. В оставшейся части работы P будет собственным классом коротких точных последовательностей в $\mathcal{A}$, в смысле [125].

Пусть $\mathbb{C}$ – произвольное ч. у. множество, A – объект из $\mathcal{A}$. Для каждого $c \in \mathbb{C}$ обозначим через $A[c] : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ – функтор, определенный как

$$A[c](x) = \begin{cases} A, & x = c, \\ 0, & . \end{cases}$$

Для любой абелевой группы A обозначим через $\tilde{H}^n(\mathbb{C}, A)$ приведенные когомологии нерва $\mathbb{C}$ с коэффициентами в A. Положим $]a, b[= \{x \in \mathbb{C} : a < x < b\}$.

Пусть $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ – категория функторов $\mathbb{C} \to \mathcal{A}$. Напомним, что $\mathbb{C}\,P$ обозначает собственный класс таких последовательностей $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, что $0 \to F'(c) \to F(c) \to F''(c) \to 0$ принадлежат P при всех $c \in \mathbb{C}$.

Теорема 5.24 *[36] Пусть $\mathbb{C}$ – конечное ч. у. множество. Тогда для всех $A, B \in \mathcal{A}$ и $a < b$ в $\mathbb{C}$ существует спектральная последовательность первой четверти типа*

$$E_2^{p,q} = \tilde{H}^{p-2}(]a, b[, \mathrm{Ext}^q_P(A, B)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathbb{C}\,P}(A[a], B[b])$$

Если $\mathcal{A}$ – категория левых модулей над произвольным кольцом K с 1, то мы получаем изоморфизмы

$$\tilde{H}^{n-2}(]a, b[, K) \cong \mathrm{Ext}^n(K[a], K[b]), \quad \forall n \geq 2.$$

В случае полей K эти изоморфизмы были получены в [154]. Сиблс обобщил их на произвольные кольца K с 1. Игуса и Захария [105], а также Поло [158] применили их к изучению групп расширений и глобальной размерности категории модулей над кольцом инцидентности. Определим *относительную глобальную размерность* $\mathrm{gl.dim}\,_P\mathcal{A}$ категории $\mathcal{A}$ по отношению к P как верхнюю грань $n \geq 0$, для которых $\mathrm{Ext}^n_P(-, =) \neq 0$.

Следствие 5.25 *Пусть $\mathbb{C}$ – конечное ч. у. множество, $\mathcal{A}$ – такая абелева категория , что $\mathrm{gl.dim}\,_P\mathcal{A} < \infty$. Тогда*

$$\mathrm{gl.dim}\,_{\mathbb{C}\,P}\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \mathrm{gl.dim}\,_P\mathcal{A},$$

если и только если $\mathbb{C}$ дискретно.

Следствие 5.26 *Пусть $\mathbb{C}$ – конечное ч. у. множество, $\mathcal{A}$ – такая абелева категория, что $\mathrm{gl.dim}\,_P\mathcal{A} < \infty$. Тогда*

$$\mathrm{gl.dim}\,_{\mathbb{C}\,P}\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = 1 + \mathrm{gl.dim}\,_P\mathcal{A},$$

если и только если $\mathbb{C}$ не дискретно, и для каждой пары $a < b$ из $\mathbb{C}$ подмножество $]a, b[\subseteq \mathbb{C}$ линейно упорядочено.

Следствие 5.27 *Пусть $\mathbb{C}$ – конечное ч. у. множество, и пусть $\mathcal{A}$ – такая абелева категория, что* $\mathrm{gl.dim}\ {}_P\mathcal{A} < \infty$. *Тогда следующие свойства $\mathbb{C}$ равносильны:*

1) $\mathrm{gl.dim}\ {}_{\mathbb{C}\,P}\mathcal{A}^{\mathbb{C}} \leq 2 + \mathrm{gl.dim}\ {}_P\mathcal{A}$,

2) $\mathbb{C}$ не содержит $\hat{\mathbf{C}}_n$, при $n \geq 3$, и если подмножество $S \subseteq \mathbb{C}$ изоморфно $\hat{\mathbf{C}}_2$, то S содержит цифру 8.

Эти следствия обобщают результаты Митчела из [134].

Следствие 5.28 *Пусть $\mathbb{C}$ – конечное ч. у. множество, и пусть $q =$* $\mathrm{gl.dim}\ {}_P\mathcal{A} < \infty$. *Строгое неравенство*

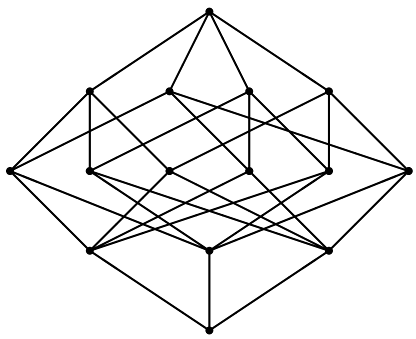
$$\mathrm{gl.dim}\ {}_{\mathbb{C}\,P}\mathcal{A}^{\mathbb{C}} < \dim\mathbb{C} + \mathrm{gl.dim}\ {}_P\mathcal{A}$$

равносильно следующим двум условиям:

1) $\dim\mathbb{C} > 3$,

2) $(\forall a, b \in \mathbb{C})$ $H_{p-2}(]a,b[) = 0$ при $p = \dim\mathbb{C}$, и для всех $A, B \in \mathcal{A}$ верно равенство $m\mathrm{Ext}^q_P(A,B) = \mathrm{Ext}^q_P(A,B)$, где m – количество элементов периодической части группы $H_{p-3}(]a,b[)$.

У. Т. Спирс [176] построил следующий пример конечного частично упорядоченного множества, для которого разность $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} - \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}$, $\mathcal{A} = Mod_K$, зависит от поля K:



Контрпример Спирса

Митчел применил топологические методы. Пусть D^2_m – клеточный комплекс разбиения круга $\{(x,y) : x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 \leq 1\}$, с топологией подпространства в $\mathbf{R}^2$, на $2m$ секторов

$$S_k = \{(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi) : \rho \leq 1, \frac{(k-1)\pi}{m} \leq \varphi \leq \frac{k\pi}{m}\}$$

где $k = 1, 2, \cdots, 2m$. Отождествляя каждую точку $(cos\varphi, sin\varphi)$ с точками $(cos(\varphi + \frac{2l\pi}{m}), sin(\varphi + \frac{2l\pi}{m}))$, где $l = 1, 2, \cdots, l-1$, получаем клеточный комплекс, геометрическая реализация которого будет псевдопроективной плоскостью. Если мы упорядочим его клетки с помощью отношения включения и добавим инициальный элемент 0 и терминальный элемент t, то получим *m-жемчужину* g_m Митчела [137].

Пусть $\mathbf{Z}(\frac{1}{m})$ – кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых равны произведениям простых делителей числа m. Митчел доказал в работе [137], что если $\mathcal{A}$ – абелева $\mathbf{Z}(\frac{1}{m})$-категория с точными копроизведениями, то

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{g_m} = 3 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A},$$

а если $\mathcal{A}$ является $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$-категорией с точными копроизведениями, то

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{g_m} = 4 + \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}.$$

Ч. Ч. Ченг [61] описал все локально конечные множества, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A}^{\mathbb{C}} - \mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A} \leq 2$.

Заметим, что статья [104] содержит алгоритмы вычисления всех рассмотренных размерностей конечных частично упорядоченных множеств. Алгоритмы основаны на элементарных операциях над строками и столбцами целочисленных матриц. Геометрические алгоритмы нахождения размерностей неизвестны.

Список литературы

[1] Датуашвили Т. *О когомологиях малых категорий.* // Труды Тбилис. мат. ин-та АН ГССР. 1979. Т.62. С.28–37.

[2] Джибладзе М. А. *Бикатегорная интерпретация третьей группы когомологий.* // Труды Тбилис. мат. ин-та. 1992. Т. 97. С. 3–9.

[3] Джибладзе М. А., Пирашвили Т. И. *О некоторых линейных расширениях категории конечно порожденных свободных модулей.* // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 123, N 3. С. 481–484.

[4] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 11-е, доп. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990.

[5] Кузьминов В. И. *О предельной последовательности точной последовательности обратных спектров.* // Докл. Акад. наук СССР. 1965. Т.163, N 3. С.565–568.

[6] Кузьминов В. И. *О производных функторах функтора проективного предела.* // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, N 2. Р. 333 – 345.

[7] Кузьминов В. И., Шведов И. А. *О пополнении абелевых групп в Р-топологии.* // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, N 4. Р.436–457.

[8] Кузьминов В. И. *Производные функторы проективного предела и классы расширений.* // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, N 2. С. 384 – 396.

[9] Миминошвили М. П. *О последовательности точных и полуточных гомологий произвольных пространств.* // Сообщ. АН ГССР. Т. 113, N 1. С. 41 – 44.

[10] Миминошвили М. П. *О когомологиях направленных множеств.* // Сообщ. АН ГССР. 1985. Т.120, N 3. С. 489 – 492.

[11] Новиков Б. В. *Частичные когомологии полугрупп и их приложения.* // Изв. вузов. Матем. 1988. N 11(318). С. 25 – 32.

[12] Новиков Б. В. *Коммутативные полугруппы с сокращением размерности 1.* // Матем. заметки. 1990. Т.48, N 1. С. 148 - 149.

[13] Новиков Б. В. *О полугруппах когомологической размерности 1.* // Допов. НАН Укр. 1996. N 8. С. 6–8.

[14] Новиков Б. В. *Об ослабленной гипотезе Митчелла.* // Допов. НАН Укр. 1998. N 3. С. 26–27.

[15] Новиков Б. В. *Когомологии полугрупп: Обзор.* // Фунд. Прикл. Мат. – в печати.

[16] Пирашвили Т. И. *Модели для теории гомотопии и когомологии малых категорий.* // Сообщ. АН ГССР. 1988. Т.129, N 2. С. 261 - 264.

[17] Пирашвили Т. И. *H^3 и модели для теории гомотопии.* // Труды Тбилис. мат. ин-та. 1990. Т.94. С.73 – 85.

[18] Прасолов А. В. *Аддитивность сильных гомологий и континуум-гипотеза.* // Докл. Акад. наук СССР. 1990. 1990. Т.310, С. 799 - 802.

[19] Скляренко Е. Г. *Некоторые применения функтора* $\varprojlim^1$. // Мат. сб. 1984. Т. 123 (165), N 3. С. 369–390.

[20] Скляренко Е. Г. *Гипер(ко)гомологии для точных слева ковариантных функторов и теория гомологий топологических пространств.* // УМН. 1995. Т. 50, вып. 3 (303). С. 109–146.

[21] Скляренко Е. Г. *Гомологии и когомологии. Предельные переходы.* // Труды матем. ин-та РАН. 1992. Т.193. С. 162–168.

[22] Хусаинов А. А. *Когомологии малых категорий с коэффициентами в абелевой категории с точными произведениями.* // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, N 4. С. 210–215.

[23] Хусаинов А. А. *О размерности Хохшильда–Митчела числовой прямой.* // Докл. Акад. наук СССР. 1992. Т. 322, N 2. С. 259–261.

[24] Хусаинов А. А. *О группах расширений в категории абелевых диаграмм.* // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, N 1. С. 179–185.

[25] Хусаинов А. А. *О размерности Хохшильда–Митчела упорядоченных множеств.* // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, N 6. С. 211–215.

[26] Хусаинов А. А. *Размерность Хохшильда–Митчела множества вещественных чисел равна 3.* // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, N 4. С. 217–227.

[27] Хусаинов А. А. *Размерность Хохшильда–Митчела линейно упорядоченных множеств и гипотеза континуума.* // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, N 5. С. 1171–1184.

[28] Хусаинов А. А. *Не lim–ацикличные суммы копий.* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, N 2. С. 464–474.

[29] Хусаинов А. А. *О глобальной размерности категории коммутативных диаграмм в абелевой категории.* // Сиб. мат. журн. 1996. Т.37, N 5. С. 1181–1194.

[30] Хусаинов А. А. *О суммах копий ацикличных спектров.* // Докл. Акад. наук. 1997. Т. 356, N 2. С. 176–177.

[31] Хусаинов А. А. *Категории с сокращениями размерности 1 частично свободны.* // Актуальные проблемы в совр. мат. Т.3. – Новосибирск: НГУ. 1997. С. 193–201.

[32] Хусаинов А. А. *Сравнение размерностей малой категории.* // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, N 6. С. 1413–1426.

[33] Хусаинов А. А. *О локально конечных частично упорядоченных множествах размерности 3.* // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, N 1. С. 201–205.

[34] Хусаинов А. А. *О глобальной размерности категории диаграмм абелевых групп над линейно упорядоченным множеством.* // Фунд. Прикл. Мат. 1998. Т. 4, N 2. С. 717–723.

[35] Хусаинов А. А. *О глобальной размерности категории диаграмм модулей.* // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, N 1. С. 214–225.

[36] Хусаинов А. А. *О группах относительных расширений в категории коммутативных диаграмм.* // Сиб. мат. журн. – в печати.

[37] André M. *Limites et fibrés.* // C.R. Acad. sci. Paris. Sér A. 1965. T.260. P. 756-759.

[38] André M. *Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative.* // Berlin etc.: Springer, 1967. (Lecture Notes in Math. 32.)

[39] Araki S., Yosimura Z. *A spectral sequence associated with a cohomology theory of infinite CW-complexes.* // Osaka J. Math. 1972. V.9, N 3. P.351-365.

[40] Baclawski K. *Galois connections and the Leray spectral sequence.* // Adv. Math. 1977. V. 25, N 3. P.191–215.

[41] Balcerzyk S. *The cohomological dimension of the ordered set of real numbers equals three.* // Fund. Math. 1981. V. 111, N 1. P.37–44.

[42] Barrat M. G. *A note on the cohomology of semigroups.* // J. London Math. Soc. 1961. V. 36. P.496–498.

[43] Bass H. *Descending chains and the Krull ordinal of commutative Noetherian rings.* // J. Pure Appl. Algebra. 1971. V. 5, N 4. P.347–360.

[44] Baues H.-J. *On the cohomology of categories, universal Toda brackets and homotopy pairs.* // Preprint MPI / 94-141. 1994. P.1–30.

[45] Baues H.-J. *Homotopy Types.* // Handbook of Algebraic Topology. 1995. Elsevier, Amsterdam. P.1–72.

[46] Baues H.-J. *Non-Abelian Extensions and Homotopies.* // K-theory. 1996. V.10. P.107–133.

[47] Baues H.-J. *On the group of homotopy equivalences of a manifold.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V.348, N 12. P.4737–4773.

[48] Baues H.-J., Conduché D. *On the 2-type of an iterated loop space.* // Forum Math. 1997. V.9. P.721–738.

[49] Baues H.-J., Dreckmann W. *The Cohomology of Homotopy Categories and the General Linear Group.* // K-theory. 1989. V.3. P. 307– 338.

[50] Baues H.-J., Hartl M. *The homotopy category of Moore spaces and the cohomology of the category of Abelian groups.* // Preprint MPI. 1995. P. 1–28.

[51] Baues H.-J., Tonks A. *On sum-normalized cohomology of categories, twisted homotopy pairs and universal Toda brackets.* // Quart. J. Math. Oxford (2). 1996. V.47. P. 405–433.

[52] Baues H.-J., Tonks A. *On the twisted cobar construction.* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1997. V. 121. P. 229– 245.

[53] Baues H.-J., Wirsching G. *Cohomology of small categories.* // J. Pure Appl. Algebra. 1985. V.38, N 2/3. P.187–211.

[54] Betley S. *Homology of Gl(R) with Coefficients in a Functor of Finite Degree.* // J. Algebra. 1992. V.150. P.73–86.

[55] Bousfield A.K., Kan D.M. *Homotopy limits, completions and localizations.* Berlin etc.: Springer, 1972. (Lecture Notes in Math. 304.)

[56] Brune H. *Einige globale Dimensionen bei geordneten Mengen und die Exaktheit der Finktoren* $\lim\limits_{\rightarrow}$ *und* $\lim\limits_{\leftarrow}$. – Dissertation, Gesamthochschule Paderborn. 1977.

[57] Brune H. *Flache darstellungen von geordnete mengen.* // Manuscripta math. 1978. V.28. P. 141–154.

[58] Brune H. *Some left pure semisimple ringoids which are not right pure semisimple.* // Commun. Algebra. 1979. V.7, N 17. P. 1795 - 1803.

[59] Brune H. *On the global dimension of the functor category.* // J. Pure Appl. Algebra. 1983. V.28, N 1. P.31 - 39.

[60] Chen N. H. *Global dimension of skew group rings.* // Dissertation, Rutgers University. New Brunswick, NJ. 1978.

[61] Cheng C.C. *Finite partially ordered sets of cohomological dimension one* // J. Algebra. 1976. V. 40, N 2. P. 340–347.

[62] Cheng C. C. *Deltas of Hochschild dimension one.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V.67, N 2. P.221-223.

[63] Cheng C. C. *Exact limits.* // J.Pure Appl.Algebra. 1983. V.28, N 1. P.65–70.

[64] Cheng C. C. *Separable semigroup algebra* // J.Pure Appl.Algebra. 1984. V.33. P.151–158.

[65] Cheng C.C. *DCC categories of cohomological dimension one* // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V. 80, N 2. P. 107–116.

[66] Cheng C. C., Mitchell B. *Flatness and projectivity of modules that come from C-sets.* // Algebra, Topology and Category Theory. Academic Press. New York. 1976. P. 33 - 44.

[67] Cheng C. C., Mitchell B. *DCC posets of cohomological dimension one.* // J. Pure Appl. Algebra. 1978. V.13, N 2. P.125-137.

[68] Cheng C. C., Mitchell B. *Posets of cohomological dimension one with finitaly many tails.* // J.Algebra. 1982. V.77. P.382-391.

[69] Cheng C. C., Shapiro J. *Cohomological dimension of an Abelian monoid.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V.88, N 4. P.547-551.

[70] Cheng C. C., Shapiro J. *A converse of the Hilbert syzygy theorem* // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V.89, N 1. P.11–15.

[71] Cheng C. C., Wong R. W. *Hereditary monoid rings.* // Amer. J. Math. 1982. V.104, N 5. P.935-942.

[72] Cheng C. C., Wong R. W. *Hereditary deltas.* // J. Algebra. 1994. V.167, N 1. P.1–8.

[73] Cheng C.C., Wu Y.-C., Mitchell B. *Categories of fractions preserve dimension one.* // Commun. Algebra. 1980. V.8. P.927–939.

[74] Cibils C. *Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes.* // J. Pure Appl. Algebra. 1989. V.56, N 3. P.221–232.

[75] Cohn P. M. *Free rings and their relations.* New York: Academic Press, 1971. (Кон П. Свободные кольца и их связи. - М.: Мир, 1975.)

[76] Connes A. *Cohomologie cyclicue at foncteurs Ext^n.* // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.I Math. 1983. T. 296. P. 953–958.

[77] Connes A., Moscovici H. *Cyclic cohomology and Hopf algebras.* // Preprint. 1999. (http:// xxx.itep.ru)

[78] Deheuvels R. *Homologie des ensembles ordonnés et espaces topologiques* // Bull. Soc. Math. France. 1962. T.90. P.261–321.

[79] Dow A., Simon P., Vaughan J.E. *Strong homology and the proper forcing axiom.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V.106, N 3. P.821 - 828.

[80] Dwyer W.G., Kan D.M. *Function complexes for diagrams of simplicial sets.* // Indag. Math. 1983. V.45. P.139-147.

[81] Dwyer W.G., Kan D.M. *Centric maps and realization of diagrams in the homotopy category.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114, N 2. P. 575 – 584.

[82] Edwards D.A., Hastings H.M. *Čhech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology.* // Berlin etc.: Springer, 1976. (Lecture Notes in Math. 542.)

[83] Edwards D.A., Hastings H.M. *On topological method in homological algebra.* // Proc. Amer. Math. Soc.1976. V.59, N 2. P.389-393.

[84] Eklof P. C. *Set theoretic methods in homological algebra and Abelian groups.* Sem. de Math. Superieures, 69. Montreal: Les Presses de l'Universite de Montreal, 1980. (Эклоф П. Теоретико-множественные методы в гомологической алгебре и теории абелевых групп. М.: Мир, 1986.)

[85] Fiedorowicz Z. *Classifying spaces of topological monoids and categories.* // Amer. J. Math. 1984. V.106, N 2. P. 301-350.

[86] Ford F.J. *A Mayer-Vietoris sequence for modules over a small category.* // Commun. Algebra. 1995. V.23, N 11. P. 3977 - 3982.

[87] Gabriel P., Zisman M. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967. (Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий. - М.: Мир, 1971.)

[88] George D. *Homology with models.* // Fund. Math. 1984. V.122, N 1. P.33-45.

[89] Gerstenhaber M., Schack S.D. *Simplicial cohomology is Hochschild cohomology.* // J.Pure Appl.Algebra. 1983. V.30. P.143-156.

[90] Goblot R. *Sur les dérivés de certaines limites projectives. Applications aux modules.* // Bull. Sci. Math. 1970. V.94. P.251-255.

[91] Golasiński M. *n-fold extensions and cohomologies of small categories.* // Math. Rev. anal. numer. at theor. approxim. Math. 1989. V. 31, N 1. P. 53 – 59.

[92] Gray B.I. *Spaces of the same n-type, for all n.* // Topology. 1966. V.5, N 3. P.241-243.

[93] Gray B., McGibbon C.A. *Universal phantom maps.* // Topology. 1993. V.32, N 2. P.371-394.

[94] Grothendieck A. *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Math. J. 1957. V. 9. P. 119–221. (Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. - М.: Изд-во иностр. лит., 1961.)

[95] Gruson L., Jensen C.U. *Modules algébriquement compacts et foncteurs* $\varprojlim^{(i)}$. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér A. 1973. T.276, N 26. P.1651–1653.

[96] Gruson L., Jensen C.U. *Dimensions cohomologiques reliées and foncteurs* $\varprojlim^{(i)}$. // Sem. d'Algebre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Berlin etc.: Springer, 1980, P.234–294. (Lecture Notes in Math. 867.)

[97] Hilton P. J., Stammbach U. *A Course in Homological Algebra.* Berlin etc.: Springer, 1971.

[98] Hoff G. *On the cohomology of categories.* // Rend. Mat., VI. Ser.7, N 2. 1974. P. 169–192.

[99] Hoff G. *Cohomologies et extensions de categories.* // Math. Scand. 1994. V.74, N 2. P. 191–207.

[100] Höppner M. *Deltas of dimension one.* // Commun. Algebra. 1986. V.14. P.1287–1298.

[101] Höppner M., Lenzing H. *Projective diagrams over partially ordered sets are free.* // J. Pure Appl. Algebra. 1981. V.20. P.17-22.

[102] Husainov A. A. *Cohomology of small categories.* // Quest. Answ. General Topology. 1990. V.8. Special Issue. P.179–184.

[103] Husainov A. A. *On the Hochschild–Mitchell dimension of subsets of the reals.* // Contemp. Math. 1995. V.184. P.207–213.

[104] Husainov A. A., Pancar A. *Methods of Calculating Cohomological and Hochschild–Mitchell Dimensions of Finite Partially Ordered Sets.* // Theory Appl. Categories – to appear.

[105] Igusa K., Zacharia D. *On the cohomology of incidence algebras of partially ordered sets.* // Commun. Algebra. 1990. V.18, N 3. P.873–887.

[106] Isbell J. *A note on exact colimits.* // Canad. Math. Bull. 1968. V.11. P. 569 - 572.

[107] Isbell J. *Exact colimits I.* // Ann. of Math. 1974. (2) 100, P. 633 - 637.

[108] Isbell J., Mitchell B. *Exact colimits.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V.79. P. 994 – 996.

[109] Isbell J., Mitchell B. *Exact colimits and fixed points.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V.220. P. 289 – 298.

[110] Jensen C.U. *On the vanishing of* $\varprojlim^{(i)}$. // J. Algebra. 1970. V.15, N 2. P. 151–166.

[111] Jensen C.U. *Les foncteurs dérivés de* $\varprojlim$ *et leurs applications en théorie des modules.* Berlin etc.: Springer, 1972. (Lecture Notes in Math. 254)

[112] Jensen C.U. *On the global dimension of the functor category (mod R, Ab).* // J. Pure Appl. Algebra. 1977. V.11. P. 45–51.

[113] Jensen C.U., Lenzing H. *Model theoretic algebra: with particular emphasis in fields, rings, modules.* Algebra, Logic and Applications, 2. New York etc.: Gordon and Breach Science Publishers. 1989.

[114] Jibladze M., Pirashvili T. *Cohomology of algebraic theories.* // J. Algebra. 1991. V.137, N 2. P.253–296.

[115] Latch D. M. *On derived functors of limit.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V.181. P. 155 - 163.

[116] Latch D. M. *The uniqueness of homology of the categories.* // J.Pure Appl. Algebra 1977. V.9. P.221–237.

[117] Latch D. M. *A fibred homotopy equivalence and homotopy theories for the category of small categories.* // J.Pure Appl. Algebra 1979. V.15. P.247–269.

[118] Latch D.M., Mitchell B. *On the difference between cohomological and homological dimension.* // J. Pure Appl. Algebra. 1974. V.5. P. 333 - 343.

[119] Laudal O.A. *Sur la limite projective et la theorie de la dimension.* // Sem. de Top. Geom. Diff. 1961. V.3. P. 1–23.

[120] Laudal O. A. *Cohomologie locale. Applications.* // Math. Scand. 1963. V.12, N.2. P.147-162.

[121] Laudal O.A. *Sur les limites projectives et inductives.* // Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 1965. 3^e ser. T. 82. P. 241 – 296.

[122] Laudal O. A. *Projective systems on trees and valuation theory.* // Can. J. Math. 1968. V.20. P.984 – 1000.

[123] Laudal O. A. *Note on the projective limit on small categories.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V.33, N.2. P.307–309.

[124] Leech J. *Cohomology theory for monoid congruences.* // Houston J. Math. 1985. V.11, N 2. P.207–223.

[125] Mac Lane S. *Homology.* Berlin: Springer, 1963. (Маклейн С. Гомология. - М.: Мир, 1966.)

[126] Mac Lane S. *Categories for the working Mathematician.* N. Y. a. o. : Springer-Verlag, 1971 (Graduate Texts in Mathematics).

[127] Mardešić S., Prasolov V. *Strong homology is not additive.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V.307, N 2. P. 725 – 744.

[128] McGibbon C.A., Roitberg J. *Phantom maps and rational equivalences.* // Amer. J. Math. 1994. V.116, N 6. P. 1365 – 1379.

[129] McGibbon C.A., Steiner R. *Some questions about the first derived functor of the inverse limit.* // J. Pure Appl. Algebra. 1995. V.103. P. 325–340.

[130] McGibbon C.A., Steiner R. *Phantom maps and the towers which determine them.* // J. London Math. Soc.(2) 1997. V.55. P.601–608.

[131] Milnor J. *On axiomatic homology theories.* // Pacific J. Math. 1962. V.12, N 1. P.337–341.

[132] Mitchell B. *Theory of categories.* New York: Academic Press, 1965.

[133] Mitchell B. *On the dimension of object and categories I. Monoids* // J. Algebra. 1968. V. 9, N 3. P.314–340.

[134] Mitchell B. *On the dimension of object and categories II. Finite ordered sets* // J. Algebra. 1968. V. 9, N 3. P. 341–368.

[135] Mitchell B. *On the Dimension of Object and Categories III.* // Berlin etc.: Springer, 1969, P.165 – 196. (Lecture Notes in Math. 92.)

[136] Mitchell B. *The dominion of Isbell.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V.167. P.319 - 331.

[137] Mitchell B. *Rings with several objects.* // Adv. Math. 1972. V.8. P.1-161.

[138] Mitchell B. *The cohomological dimension of a directed set.* // Canad. J.Math.1973. V.25, N 2. P.233-238.

[139] Mitchell B. *Some applications of module theory to functor categories.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V.84. P.867-885.

[140] Mitchell B. *A Remark on Projectives in Functor Categories.* // J. Algebra. 1981. V.69, N 1. P.24-31.

[141] Mitchell B. *Low dimensional group cohomology as monoidal structures.* // Amer. J. Math. 1983. V.105. P. 1049 - 1066.

[142] Mitchell B. *Separable algebroids.* // Mem. AMS. 1985. V.57, N 333. 96p.

[143] Novikov B.V. *On partial cohomologies of semigroups.* // Semigroup Forum. 1984. V.28, N 1-3. P.355-364.

[144] Novikov B. V. *Semigroups of Cohomological Dimension One.* // J. Algebra. 1998. V.204, N 2. P.386–393

[145] Oberst U. *Basisweiterung in der Homologie kleiner Kategorien.* Math.Z. 1967. Bd.100. S.36–58.

[146] Oberst U. *Exactness of inverse limits.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V.74, N.6. P.1129–1132.

[147] Oberst U. *Homology of categories and exactness of direct limits.* // Math. Z. 1968. Bd. 107. S.87–115.

[148] Oberst U., Rohrl H. *Flat and Coherent Functors.* // J. Algebra. 1970. V.14. P.91–105.

[149] Oliver B. *Higher limits of functors on categories of elementary Abelian p-groups.* // Prepr.Ser. / Mat. inst. Aarhus univ. 1992. N.6. P.1-13.

[150] Oliver B. *Higher limits via Steinberg representations.* // Commun. Algebra. 1994. V.22, N 4. P. 1381 - 1393.

[151] Osofsky B. *Global dimension of valuation rings.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V.127. P.136 - 149.

[152] Osofsky B. *The subscript of* $\aleph_n$*, projective dimension, and the vanishing of* $\underleftarrow{\lim}^{(n)}$. // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V.80. N 1. P.8 - 26.

[153] Osofsky B. *Projective dimension of "nice"directed unions.* // J. Pure Appl. Algebra. 1978. V. 13. P. 179–219.

[154] Parshall B., Scott L. *Derived categories, quasi-hereditary algebras, and algebraic groups.* // Carleton Univ. Math. Notes. 1988. V.3. P. 1–105.

[155] Pirashvili T. *Cohomology of small categories in homotopical algebra.* // K-theory and homological algebra. Berlin etc.: Springer, 1990, P. 268–302. (Lecture Notes in Math. 1437.)

[156] Pirashvili T. *Category of Eilenberg–MacLane Fibrations and Cohomology of Grothendieck Constructions.* // Commun. Algebra. 1993. V.21, N 1. P. 309–341.

[157] Pirashvili T., Waldhausen F. *MacLane homology and topological Hochschild homology.* // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V.82. P. 81–98.

[158] Polo P. *On Cohen-Macaulay posets, Koszul algebras and certain modules associated to Schubert varietes.* // Bull. London Math. Soc. 1995. V.27, N 5. P.425–434.

[159] Porter T. *Categories of promodules.* // Cah. Topol. Géom. Differ. 1976. V. 16. P.295–300.

[160] Porter T. *Torsion theoretic results in procategories. I. Primary decomposition of bounded promodules.* // Proc. Royal Irish Acad. 1976. V.76A. P.145–154.

[161] Porter T. *Torsion theoretic results in procategories. II-III.* // Proc. Royal Irish Acad. 1976. V.76A. P.155–172.

[162] Porter T. *Stability of algebraic inverse systems. I: Stability, weak stability and the weakly–stable socle.* // Fundam. Math. 1978. V.100. P.17–33.

[163] Porter T. *Essential properties of pro-objects in Grothendieck categories.* // Cah. Topol. Géom. Differ. 1979. V. 20, N 1. P.3–57.

[164] Porter T. *Reduced powers, ultrapowers and exactness of limits.* // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 26. P.325–330.

[165] Porter T. *The derived functors of lim and protorsion modules.* // Cah. Topol. Géom. Differ. 1983. V. 24. P.115–131.

[166] Prasolov A. V. *A spectral sequence for strong homology.* // Glas. Mat. III. 1989. Ser.24 (44), N 1. P. 17–24.

[167] Quillen D.G. *Higher algebraic K-theory.* // Algebraic K-Theory I, Evanston - 1972. Berlin etc.: Springer, 1973, P.85–147. (Lecture Notes in Math. 341.)

[168] Quillen D.G. *Homotopy Properties of the Poset of Nontrivial p-Subgroups of a Group.* // Adv. Math. V.28, N 2. 1978. P.101-128.

[169] Roos J.-E. *Sur les foncteurs dérivés de lim. Applications.* // C. r. Acad. sci. Paris. Sér A. 1961. T.252, N 24. P. 3702 - 3704.

[170] Roos J.-E. *Bidualité et structure des foncteurs dérivés de lim dans la catégorie des modules sur un anneau réguler.* // C.r.Acad.sci. Paris. Sér A. 1962. T.254, N 9. P.1556-1558.

[171] Roos J.-E. *Bidualité et structure des foncteurs dérivés de lim dans la catégorie des modules sur un anneau réguler.* // C. r. Acad. sci. Paris. Sér A. 1962. T.254, N 10. P.1720-1722.

[172] Roos J.-E. *Sur les foncteurs dérivés des produits infinis dans les catégories de Grothendieck. Exemples et contre-exemples.* // C. r. Acad. sci. Paris. Sér A. 1966. T.263. P. 895 – 898.

[173] Roos J.-E. *Locally Noetherian categories and generalized strictly linearly compact rings. Applications.* // Berlin etc.: Springer, 1969, P. 197–277. (Lecture Notes in Math. 92.)

[174] Schubert H. Kategorien I, II. Berlin: Akademie - Verlag, 1970.

[175] Shelah S. *Infinite Abelian groups, Whitehead problem and some construction.* // Israel J. Math. 1974. V.18. P. 243–256.

[176] Spears W.T. *Global dimension in categories of diagrams.* // J. Algebra. 1972. V. 22. P. 219–222.

[177] Stallings J.R. *On torsion free groups with infinitely many ends.* // Ann. Math. 1968. (2) V.88. P.312 - 334.

[178] Stenström B. *Purity in functor categories.* // J. Algebra. 1968. V.8. P.352 – 361.

[179] Swan R.G. *Groups of cohomological dimension one.* // J. Algebra. 1969. V.12. P.585 - 610.

[180] Vogt R.M. *Homotopy limits and colimits.* // Math. Z. 1973. Bd. 134, N 1. P. 11-52.

[181] Watts C.E. *A Homology Theory for Small Categories.* // Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla. 1965. P.331–335.

[182] Wigner D. *Inverse limits and the completeness of quotient groups.* // Mich. Math. J. 1975. V.22, N 2. P.165-170.

[183] Wong R. *Some projective free ringoids.* // Dissertation, Rutgers University. New Brunswick, NJ. 1977.

[184] Wong R. *Free ideal monoid rings.* // J. Algebra. 1978. V.53. P.21-35.

[185] Yeh Z. Z. *Higher inverse limits and homology theories.* // Thesis, Princeton. 1959.

[186] Yoneda N. *On Ext and exact sequences.* //J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. I. 1960. V. 8. P. 507 – 576.