Сопряженные функторы и расширения Кана

Хусаинов А.А.

2021

Определение универсальной стрелки

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор. *Универсальной стрелкой* для $B \in Ob\,\mathcal{B}$ называется пара $(A, \lambda : B \to U(A))$, состоящая из таких объекта $A \in Ob\,\mathcal{A}$ и морфизма $\lambda \in \mathcal{B}(B, U(A))$, что для любых объекта $A' \in Ob\,\mathcal{A}$ и морфизма $\mu : B \to U(A')$ существует единственный морфизм $\alpha : A \to A'$, удовлетворяющий равенству $U(\alpha) \circ \lambda = \mu$. Это свойство изображается с помощью диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\forall\mu"'] & & U(A) \arrow[dl, dashed, "U(\alpha)"] \\ & U(A') & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "\exists!\alpha"] \\ A' \end{tikzcd}$$

Пример: пополнение метрического пространства

Пусть $\mathcal{B} = Metr$ – категория метрических пространств и равномерно непрерывных отображений, $\mathcal{A} = \overline{Metr}$ – ее полная подкатегория, состоящая из полных метрических пространств, U - полное вложение

$$\overline{Metr} \subset Metr$$

По теореме Хаусдорфа, для всякого $M \in Metr$ существует изометрия $i_M : M \subseteq \overline{M}$ в полное метрическое пространство, причем образ вложения i_M плотен в $\overline{M}$. Мы утверждаем, что $(\overline{M}, i_M)$ – универсальная стрелка.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "i_M"] \arrow[dr, "\forall\mu"'] & & \overline{M} \arrow[dl, dashed, "U(\alpha)"] \\ & C' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \overline{M} \arrow[dl, "\exists!\alpha"] \\ C' & \end{tikzcd}$$

Каждый $x \in \overline{M}$ равен классу эквивалентности $cls(x_n)$ некоторой фундаментальной последовательности (x_n). Значит, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ в $\overline{M}$. Поскольку (μx_n) фундаментальна, то верно равенство $\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \mu(x_n)$.

Контрпример

Пусть $\mathcal{B} = Metr$ – категория метрических пространств и непрерывных отображений, $\mathcal{A} = \overline{Metr}$ – ее полная подкатегория, состоящая из полных метрических пространств, U - полное вложение

$$\overline{Metr} \subset Metr$$

Мы утверждаем, что $(\overline{M}, i_M)$ не для всякого метрического пространства M будет универсальной стрелкой. Возьмем $M = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Ясно $\overline{M} = [0,1]$. Пусть $\mu(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[rr, "i_M"] \arrow[dr, "\mu(x)=\frac{1}{x}"'] & & {[0,1]} \arrow[dl, dashed, "U(\alpha)"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[d, "\nexists\alpha"] \\
C'
\end{tikzcd}$$

Иначе $\alpha(0) = \frac{1}{0}$. Можно взять также вместо $[0,1]$ множество действительных чисел, а вместо $(0,1)$ - множество иррациональных чисел.

Функториальность универсальной стрелки

Предложение

Если для каждого объекта $B \in \mathcal{B}$ можно выбрать универсальную стрелку $(A_B, \lambda_B : B \to UA_B)$ то отображение $B \mapsto (A_B, \lambda_B)$ единственным образом продолжается до некоторого функтора $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ с естественным преобразованием $\lambda_B : B \to U\Lambda B$, принимающего значения $\Lambda B = A_B$.

Доказательство Обозначим через $\Lambda : Ob(\mathcal{B}) \to Ob(\mathcal{A})$ отображение, определенное как $\Lambda(B) = A_B$. Для произвольных объекта $B' \in \mathcal{B}$ и морфизма $B \xrightarrow{\beta} B'$ получим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\lambda_B"'] \arrow[d, "\beta"'] & U(\Lambda B) \arrow[d, dashed, "U(\alpha)"] & \Lambda B \arrow[d, "\exists ! \alpha"] \\
B' \arrow[r, "\lambda_{B'}"] & U(\Lambda B') & \Lambda B'
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Положим $\Lambda(\beta) = \alpha$. Если $\beta = 1_B$, и значит $B' = B$, то $\alpha = 1_{\Lambda B}$ делает квадрат коммутативным, ибо $U(1_{\Lambda B}) = 1_{U\Lambda B}$. Значит, $\Lambda(1_B) = \alpha = 1_{\Lambda B}$.

Проверка равенства $\Lambda(\beta'\beta) = \Lambda(\beta')\Lambda(\beta)$

Рассмотрим морфизмы $B \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{\beta'} B''$. По определению $\Lambda(\beta)$, $\Lambda(\beta')$ и $\Lambda(\beta'\beta)$, коммутативны три квадрата.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\lambda_B"] \arrow[d, "\beta"'] & U(\Lambda B) \arrow[d, dashed, "U(\Lambda\beta)"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "U\Lambda(\beta'\beta)"] \\
B' \arrow[r, "\lambda_{B'}"] \arrow[d, "\beta'"'] & U(\Lambda B') \arrow[d, dashed, "U(\Lambda\beta')"] \\
B'' \arrow[r, "\lambda_{B''}"] & U(\Lambda B'')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda B \arrow[d, "\exists!\alpha=\Lambda(\beta)"] \arrow[dd, bend left=80, "\Lambda(\beta'\beta)"] \\
\Lambda B' \arrow[d, "\exists!\alpha'=\Lambda(\beta')"] \\
\Lambda B''
\end{tikzcd}$$

Композиция верхнего и нижнего квадрата дает тоже коммутатиный квадрат, совпадающий с внешним. Отсюда $\Lambda\beta'\Lambda\beta = \Lambda(\beta'\beta)$. Диаграмма (1) на стр. 6 показывает, что морфизмы (λ_B) будут составлять естественное преобразование $1_{\mathcal{B}} \to U\Lambda$.

Определение функториальной универсальной стрелки

Пример

Пополнение метрического пространства $M \mapsto \overline{M}$ функториально. Отсюда получаем функтор пополнения категории нормированных пространств и ограниченных линейных отображений на категорию банаховых пространств.

Определение

Функториальной универсальной стрелкой по отношению к функтору $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется функтор $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и естественное преобразование $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to U\Lambda$, такое, что для всякого $B \in \mathcal{B}$ пара $(\Lambda(B), \eta_B : B \to U\Lambda B)$ будет универсальной стрелкой.

Функторы копредела и предела

(Копредел) Пусть J – малая категория, и $\mathcal{A}^J$ – категория функторов $F : J \to \mathcal{A}$ и естественных преобразований. Рассмотрим функтор диагонали

$$\Delta_J = \Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^J,$$

сопоставляющий каждому $A \in Ob(\mathcal{A})$ функтор $J \to \mathcal{A}$ принимающий постоянные значения $(\Delta A)(j) = A$ - на объектах $j \in J$ и $\Delta A(\alpha) : \Delta A \to \Delta A'$ - на морфизмах, определенные как $\Delta(\alpha)_j = \alpha : A \to A'$.

Определение

Если существует универсальная стрелка $(A, \lambda : F \to \Delta A)$, то объект A вместе с естественным преобразованием λ называется копределом $\varinjlim^J F$.

Морфизмы $\lambda_j : F(j) \to \varinjlim^J F$ составляют *конус копредела*. Аналогично определяется предел $\varprojlim_J F$ с помощью коуниверсальной стрелки $(A, p : \Delta A \to F)$.

Функторы копредела и предела

Пусть $\mathcal{C}$ – малая категория, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ – функтор. *Пределом* $\varprojlim_{\mathcal{C}} F$ называется пара, состоящая из таких объекта $\varprojlim_{\mathcal{C}} F \in Ob\,\mathcal{A}$ и семейства морфизмов $\{p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \to F(c)\}_{c \in Ob\,\mathcal{C}}$, что для каждого морфизма $\alpha : a \to b$ категории $\mathcal{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim_{\mathcal{C}} F \arrow[dl, "p_a"'] \arrow[dr, "p_b"] & \\
F(a) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(b)
\end{tikzcd}$$

которая называется конусом морфизмов над функтором F.
Этот конус должен быть универсальным, в следующем смысле:

Функторы копредела и предела

Для любого другого конуса $\{\pi_c : A \to F(c)\}_{c \in Ob\,\mathcal{C}}$, над F с вершиной A

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_a"'] \arrow[dr, "\pi_b"] & \\ F(a) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(b) \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $u : A \to \varprojlim_{\mathcal{C}} F$, такой, что при всех $c \in Ob\,\mathcal{C}$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "\exists ! u"] \arrow[dr, "\pi_c"'] & & \varprojlim_{\mathcal{C}} F \arrow[dl, "p_c"] \\ & F(c) & \end{tikzcd}$$

Морфизмы $p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \to F(c)$ называются *проекциями* предела.

Свойства копределов и пределов

Лемма

Семейство проекций предела $p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \to F(c)$ мономорфно в том смысле, что одновременное выполнение равенств $p_c \circ f = p_c \circ g$ для всех $c \in \mathcal{C}$ влечет $f = g$.

В случае, когда $\mathcal{C}$ – дискретная категория, функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ будет в точности семейством объектов $F(c) = A_c \in \mathcal{A}$. В этом случае предел называется произведением $\prod_{c \in \mathcal{C}} A_c$, а проекции предела – проекциями произведения.

Пример

Если категория $\mathcal{A}$ является частично упорядоченным множеством, то произведением $\prod\limits_{i \in I} A_i$ будет точная нижняя грань $inf\{A_i : \ i \in I\}$ элементов $A_i \in \mathcal{A}$.

Свойства копределов и пределов

Определение

Если $\mathcal{C}$ состоит из двух объектов a, b и двух морфизмов $p, q : a \to b$ (и тождественных морфизмов 1_a, 1_b), то предел функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ называется уравнителем

Категория $\mathcal{A}$ *имеет пределы* для функторов из заданного класса, если для каждого функтора из этого класса существует предел. В частности, свойство "имеет произведения" означает, что для любых множества I и семейства объектов $\{A_i\}_{i\in I}$ существует произведение $\prod_{i\in I} A_i$.

Свойства копределов и пределов

Уравнителем пары морфизмов $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B$ является пара (E, λ), состоящая из объекта E и морфизма $\lambda : E \to A$ таких, что $\alpha \circ \lambda = \beta \circ \lambda$, и для любых других (E', λ'), удовлетворяющих $\alpha \circ \lambda' = \beta \circ \lambda'$, существует единственный морфизм $f : E \to E'$, для которого $\lambda \circ f = \lambda'$. Обозначим пару (E, λ) через $Eq(\alpha, \beta)$.

Предложение

Пусть (E, λ) – уравнитель некоторой пары морфизмов. Тогда λ – мономорфизм.

Такие мономорфизмы называются *строгими*.

Пример

В категории множеств Set каждая инъекция $A \subset B$ является уравнителем некоторой пары.

Можно взять пару $f, g : B \to \{0, 1\}$, $f = \chi_A$, и $(\forall x \in B)\ g(x) = 1$.

Критерий полноты категории

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – категория. Следующие свойства категории $\mathcal{A}$ равносильны:
(i) Для любых малой категории $\mathcal{C}$ и функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ существует предел $\varprojlim_{\mathcal{C}} F$ в категории $\mathcal{A}$; в этом случае категория $\mathcal{A}$ называется (мало) полной.
(ii) Категория $\mathcal{A}$ имеет произведения и уравнители.

Доказательство. $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ – функтор. Для каждого $\alpha \in Mor\,\mathcal{C}$ имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\prod_{c\in Ob\,\mathcal{C}} F(c) \arrow[d, "p_{dom\alpha}"'] & \prod_{\gamma\in Mor\,\mathcal{C}} F(cod\gamma) \arrow[d, "\overline{p}_\alpha"] \\
F(dom\alpha) \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F(cod\alpha)
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

где $\overline{p}_\alpha$ – проекции произведения $A_\alpha = F(cod\alpha)$.

Критерий полноты категории

Обозначим через

$$q_0 : \prod_{c \in Ob\,\mathcal{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in Mor\,\mathcal{C}} F(cod\gamma)$$

(единственный) морфизм, делающий диаграмму (2) коммутативной. Проекции

$$p_{cod\alpha} : \prod_{c \in Ob\,\mathcal{C}} F(c) \longrightarrow F(cod\alpha)$$

тоже дают единственный морфизм $q_1 : \prod_{c \in Ob\,\mathcal{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in Mor\,\mathcal{C}} F(cod\gamma)$, для которого $\overline{p}_\alpha \circ q_1 = p_{cod\alpha}$. Рассмотрим уравнитель (Eq, e) пары морфизмов q_0 и q_1. Докажем, что пара $(Eq, \{p_c \circ e\}_{c \in Ob\,\mathcal{C}})$ является пределом функтора F.

Критерий полноты категории

Пусть $(A, \{\pi_c : A \to F(c)\}_{c \in Ob\,\mathcal{C}})$ – конус над F, семейство морфизмов, таких, что $F(\alpha) \circ \pi_{dom\alpha} = \pi_{cod\alpha}$ для всех $\alpha \in Mor\,\mathcal{C}$. Существует единственный морфизм $\pi = (\pi_c) : A \to \prod_c F(c)$, для которого $p_c \circ \pi = \pi_c$ для всех $c \in Ob\,\mathcal{C}$. Рассмотрим диаграмму, в которой квадрат коммутативен для всех $\alpha \in Mor\,\mathcal{C}$ при $i = 0$, и $\overline{p}_\alpha \circ q_1 = p_{cod\alpha}$ при $i = 1$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi_{dom\alpha}"'] & \prod_{c \in Ob\,\mathcal{C}} F(c) \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "p_{dom\alpha}"] \arrow[dr, dotted, "p_{cod\,\alpha}"] & \prod_{\gamma \in Mor\,\mathcal{C}} F(cod\gamma) \arrow[d, "\overline{p}_\alpha"] \\
 & F(dom\alpha) \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F(cod\alpha)
\end{tikzcd}$$

Тогда для каждого $\alpha \in Mor\,\mathcal{C}$ мы имеем равенства

$$\overline{p}_\alpha \circ q_0 \circ \pi = F(\alpha) \circ p_{dom\alpha} \circ \pi = F(\alpha) \circ \pi_{dom\alpha} = \pi_{cod\alpha} = p_{cod\alpha} \circ \pi = \overline{p}_\alpha \circ q_1 \circ \pi.$$

Критерий полноты категории

По лемме о том, что семейство морфизмов конуса предела мономорфно, для предела по дискретной категории, семейство проекций $\overline{p}_\alpha$ будет мономорфным. Следовательно, $q_0 \circ \pi = q_1 \circ \pi$.
Наоборот, поскольку верны равенства $p_c\pi = \pi_c$, мы получаем соотношения $\overline{p}_\alpha \circ q_0 \circ \pi = F(\alpha) \circ p_{dom\alpha} \circ \pi = F(\alpha) \circ \pi_{dom\alpha}$ и $\pi_{cod\alpha} = p_{cod\alpha} \circ \pi = \overline{p}_\alpha \circ q_1 \circ \pi$, из которых вытекает, что $(A, \{\pi_c : A \to F(c)\}_{c \in Ob\,\mathcal{C}}$ будет конусом тогда, и только тогда, когда $q_0\pi = q_1\pi$.
Более того, существует изоморфизм между категорией конусов над F и категорией конусов над парой морфизмов q_0 и q_1 соответствующих F.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_c"] & F(c) \\
A' \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\pi'_c"'] &
\end{tikzcd}
\quad \mapsto \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi"] & \prod_{c \in Ob\,\mathcal{C}} F(c) \arrow[r, "q_i"] & \prod_{\gamma \in Mor\,\mathcal{C}} F(cod\gamma) \\
A' \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\pi'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Функториальность вытекает из $\pi' = \pi f \Leftrightarrow (\forall c) p_c\pi' = p_c\pi f \Leftrightarrow (\forall c)\pi'_c = \pi_c f$.
Значит существует финальный конус, который и будет пределом функтора F.

Пределы и копределы в категории множеств

Доказательство критерия полноты показывает, что предел изоморфен уравнителю между морфизмов $\prod_{c\in\mathcal{C}} F(c) \underset{q_1}{\overset{q_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\gamma\in Mor(\mathcal{C})} F(cod\gamma)$

Corollary

Предел функтора $F : \mathcal{C} \to Set$ изоморфен множеству семейств $(x_c)_{c\in Ob\,\mathcal{C}}$, таких, что для всякого $\alpha \in Mor\,\mathcal{C}$ верно $F(\alpha)(x_{dom\alpha}) = x_{cod\alpha}$. Конус предела состоит из отображений $p((x_c)_{c\in Ob\,\mathcal{C}}) = x_c$.

Такие семейства называются нитями.

Пределы и копределы в категории множеств

Копредел равен коуравнителю пары

$$\coprod_{\gamma\in Mor(\mathcal{C})} F(dom\gamma) \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} \coprod_{c\in\mathcal{C}} F(c) \quad , r_0(\alpha, x) = (dom\alpha, x),$$

$r_1(\alpha, x) = (cod\alpha, F(\alpha)x)$, откуда

Corollary

Копредел функтора $F : \mathcal{C} \to Set$ изоморфен фактормножеству $\coprod_{c\in Ob\,\mathcal{C}} F(c)/\equiv$, по наименьшему отношению эквивалентности на $\coprod_{c\in Ob\,\mathcal{C}} F(c)$ такому, что $(dom\alpha, x) \equiv (cod\alpha, F(\alpha)x)$.

Антиномия Фрейда

Теорема

Если малая категория $\mathcal{C}$ полна в малом, то она является предпорядком, в котором каждое множество элементов обладает наибольшей нижней гранью.

Доказательство. Предпорядок - это такая категория $\mathcal{C}$, что $(\forall A, B \in Ob\,\mathcal{C})$ $|\mathcal{C}(A, B)| \leqslant 1$. Пусть $\mathcal{C}$ не предпорядок. Тогда существуют две не равных стрелки

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Для всякого множества J существует произведение $\prod_{j\in J} B$. Всякая стрелка $A \to \prod_{j\in J} B$ определена своими компонентами. $2^{|J|}$ стрелок имеют компоненты, состоящие из f и g. Отсюда $|Mor\,\mathcal{C}| \geqslant |\mathcal{C}(A, \prod_{j\in J} B)| \geqslant 2^{|J|}$. Если взять J мощности большей чем $|Mor\,\mathcal{C}|$, то неравенство станет ложным.

Замечание

1) Почему предпорядком: Например, состоящей из нулевых объектов.
2) Малая категория, обладающая малыми произведениями, будет предпорядком.

Определение сопряженных функторов

Определение

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *и* $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *– функторы. Функтор* L *называется* левым сопряженным *к функтору* U*, если существует изоморфизм функторов*

$$\omega : \mathcal{B}(-, U=) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(L-, =),$$

действующих $\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \to Set$.

Изоморфизм означает существование семейства биекций $\omega_{A,B}$ делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B, UA) \arrow[r, "\omega_{A,B}"'] \arrow[d, "\mathcal{B}(g,Uf)"'] & \mathcal{A}(LB, A) \arrow[d, "\mathcal{A}(Lg,f)"'] \\
\mathcal{B}(B', UA') \arrow[r, "\omega_{A',B'}"] & \mathcal{A}(LB', A')
\end{tikzcd} \tag{3}$$

для всех $f : A \to A'$, $g : B' \to B$. Эта биекция записывается как

$$\frac{LB \to A}{B \to UA}$$

Три способа задания сопряженных функторов

Теорема

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – произвольные функторы. Тогда следующие свойства U и L эквивалентны:
(1) $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ - функториальная универсальная стрелка с естественным преобразованием $1_{\mathcal{B}} \to UL$.
(2) Функтор L сопряжен слева к U.
(3) Существуют естественные преобразования $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to UL$ и $\varepsilon : LU \to 1_{\mathcal{A}}$, делающие коммутативными диаграммы:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L*\eta"] \arrow[dr, "1_L"'] & LUL \arrow[d, "\varepsilon*L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\eta*U"] \arrow[dr, "1_U"'] & ULU \arrow[d, "U*\varepsilon"] \\ & U \end{tikzcd} \tag{4}$$

где $(L * \eta)_A = L(\eta_A)$, $(\varepsilon * L)_A = \varepsilon_{LA}$.

Три способа задания сопряженных функторов

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). В силу универсальности стрелок $(LB, \eta_B : B \to ULB)$ существуют биекции $\omega_{A,B} : \mathcal{B}(B, UA) \to \mathcal{A}(LB, A)$, сопоставляющие каждому $\beta : B \to UA$ такой единственный $\alpha : LB \to A$, что $U(\alpha)\eta_B = \beta$. Для $\omega^{-1}_{A,B}(\alpha) = U(\alpha)\eta_B$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B, UA) \arrow[d, "\mathcal{B}(g,Uf)"'] & & \mathcal{A}(LB, A) \arrow[ll, "\omega^{-1}_{A,B}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(Lg,f)"] \\
\mathcal{B}(B', UA') & & \mathcal{A}(LB', A') \arrow[ll, "\omega^{-1}_{A',B'}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] & ULB \arrow[r, "U(\alpha)"] \arrow[d, "\mathcal{B}(g,Uf)"'] & UA & & (LB \xrightarrow{\alpha} A) \arrow[ll, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{A}(Lg,f)"'] \\
B' \arrow[r, "U(f)U(\alpha)\eta_B g"] & UA' = B' \arrow[r, "U(f\alpha Lg)\eta_{B'}"] & UA' & & LB' \xrightarrow{Lg} LB \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{f} A' \arrow[ll, mapsto]
\end{tikzcd}$$

для всех $f : A \to A'$, $g : B' \to B$. Следовательно ω^{-1} - изоморфизм.

Три способа задания сопряженных функторов

(2) $\Rightarrow$ (3). Рассмотрим морфизмы $\eta_B = \omega^{-1}_{LB,B}(1_{LB}) : B \to ULB$. B, то Для всякого $\alpha : LB \to A$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(LB, LB) \arrow[r, "\omega^{-1}_{LB,B}"'] \arrow[d, "\mathcal{A}(1,\alpha)"'] & \mathcal{B}(B, ULB) \arrow[d, "\mathcal{B}(1,U\alpha)"] \\ \mathcal{A}(LB, A) \arrow[r, "\omega^{-1}_{A,B}"] & \mathcal{B}(B, UA) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{LB} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_B \arrow[d, mapsto] \\ \alpha \arrow[r, mapsto] & \omega^{-1}_{A,B}(\alpha) = U(\alpha)\eta_B \end{tikzcd}$$

Рассмотрим $\varepsilon_A = \omega_A(1_{UA}) : LUA \to A$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(UA, UA) \arrow[r, "\omega_{A,UA}"'] \arrow[d, "\mathcal{B}(\beta,1_{UA})"'] & \mathcal{A}(LUA, A) \arrow[d, "\mathcal{A}(L\beta,1_A)"] \\ \mathcal{B}(B, UA) \arrow[r, "\omega_{A,B}"] & \mathcal{A}(LB, A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{UA} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varepsilon_A \arrow[d, mapsto] \\ \beta \arrow[r, mapsto] & \omega_{A,B}(\beta) = \varepsilon_A L(\beta) \end{tikzcd} \tag{5}$$

Получаем $\varepsilon_{LB} L(\eta_B) = \omega_{LB,B}(\eta_B) = 1_{LB}$, ибо $\eta_B = \omega^{-1}_{LB,B}(1_{LB})$. Т.о. коммутативен первый треугольник диаграммы (4) на стр. 23. Аналогично, $U(\varepsilon_A)\eta_{UA} = \omega^{-1}_{A,UA}(\varepsilon_A) = 1_{UA}$ - коммутативен второй. треугольник на стр. 23.

Три способа задания сопряженных функторов

(3) $\Rightarrow$ (1). Докажем, что в случае (3) (LB, η_B) будет универсальной стрелкой. С этой целью, для произвольного $\beta : B \to UA$, возьмем $\alpha = \varepsilon_A L(\beta)$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\eta_B"] \arrow[dr, "\beta"'] & & ULB \arrow[dl, dashed, "U(\alpha)"] \\
& UA &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
LB \arrow[d, "\alpha=\varepsilon_A L(\beta)"] \\
A
\end{tikzcd}$$

Надо доказать $U(\alpha)\eta_B = \beta$. Сначала подставим вместо α морфизм $\varepsilon_A L(\beta)$: $U(\alpha)\eta_B = U(\varepsilon_A L(\beta))\eta_B = U(\varepsilon_A)UL(\beta)\eta_B$. Затем воспользуемся квадратом, показанном ниже, коммутативным, в силу естественности η и треугольником, полученным из второго треугольника на рис. (4) на стр. 23.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\beta"'] & ULB \arrow[d, "UL(\beta)"'] \\
UA \arrow[r, "\eta_{UA}"] & ULUA
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
UA \arrow[r, "\eta_{UA}"] \arrow[dr, "1_{UA}"'] & ULUA \arrow[d, "U(\varepsilon_A)"] \\
& UA
\end{tikzcd}$$

Это приводит к равенствам $U(\varepsilon_A)UL(\beta)\eta_B = U(\varepsilon_A)\eta_{UA}\beta = \beta$.

Три способа задания сопряженных функторов

Т.о. $\alpha : LB \to A$ существует. Кроме того, мы доказали импликацию $\alpha = \varepsilon_A L(\beta)$, то $\beta = U(\alpha)\eta_B$. Аналогично доказывается обратная импликация. Отсюда α является единственным: если $\beta = U(\alpha')\eta_B$, то $\alpha' = \varepsilon_A L(\beta) = \alpha$.

Свойства сопряженных функторов

Предложение

Если функтор $U : \mathcal{A} \to Set$ *имеет сопряженный слева, то* U *представим.*

Доказательство[1] Пусть L - левый сопряженный. Естественные изоморфизмы $UA \cong Set(1, UA) \cong \mathcal{A}(L1, A)$ показывают, что U - представим.

Следствие

Если $L \dashv U$ *и* $F \dashv V$, *то композиции*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend right, "U"'] & \mathcal{B} \arrow[l, bend right, "L"'] \arrow[r, bend right, "V"'] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "F"'] \end{tikzcd}$$
будут сопряжены: $L \circ F \dashv V \circ U$.

Доказательство $\mathcal{A}(LF(-), =) \cong \mathcal{B}(F(-), U(=)) \cong \mathcal{C}(-, VU(=))$.

[1] S. Awodey. Category Theory. Oxford University Press, 2010

Свойства сопряженных функторов

Следствие

Если $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ имеет левый сопряженный L, то для всякой категории $\mathcal{C}$ функтор $L^{\mathcal{C}}$ сопряжен слева к $U^{\mathcal{C}} : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$.

Доказательство основано не третьем способе задания сопряженных функторов. Функтор $L^{\mathcal{C}}$ умножает функторы и естественные преобразования слева на L: $F \mapsto L \circ F$, $\xi \mapsto L * \xi$. Верно также $(\zeta * F)_c = \zeta_{F(c)}$.

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "L*\eta"] \arrow[dr, "1_L"'] & LUL \arrow[d, "\varepsilon*L"] & \Rightarrow & L(Fc) \arrow[r, "L(\eta_{Fc})"] \arrow[dr, "1_{LFc}"'] & LUL(F(c)) \arrow[d, "\varepsilon_{LFc}"] & \Rightarrow & LF \arrow[r, "(L*\eta)*F"] \arrow[dr, "1_L"'] & LULF \arrow[d, "(\varepsilon*L)*F"] \\
 & L & & & L(F(c)) & & & LF
\end{tikzcd}
$$

Перестановочность с пределами

Следствие

Если функтор $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ имеет сопряженный слева, то U перестановочен с пределами.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диграмму состоящую из функторов и диаграмму функторов, сопряженных справа к функторам этой диаграммы.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathcal{C}} & \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \arrow[l, "L^{\mathcal{C}}"'] \\ \mathcal{A} \arrow[u, "\Delta"] & \mathcal{B} \arrow[l, "L"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \arrow[r, "U^{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\varprojlim"'] & \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \arrow[d, "\varprojlim"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "U"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Поскольку правый сопряженный функтор к композиции равен композиции сопряженных функторов, то вторая диаграмма коммутативна. Следовательно для всякого $F \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ верно $U(\varprojlim F) \cong \varprojlim(U \circ F)$.

Рефлективные подкатегории

Функтор $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется вполне унивалентным, если отображения на морфизмах $U_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(UA, UA')$ биективны для всех $A, A' \in Mor\,\mathcal{A}$.

Следствие

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ - функторы такие, что L сопряжен слева к U. Тогда функтор U будет вполне унивалентен, если и только если единица сопряжения $\varepsilon : LU \to 1_{\mathcal{A}}$ является изоморфизмом.

[2] Доказательство.[3] Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(A, A') \arrow[rr, "U_{A,A'}"] \arrow[dr, "\mathcal{A}(\varepsilon_A, 1_{A'})"'] & & \mathcal{B}(UA, UA') \arrow[dl, "\omega_{A',UA}"] \\ & \mathcal{A}(LUA, A') & \end{tikzcd} \tag{6}$$

[2] Двойственно L - вполне унивалентен $\Leftrightarrow$ $\eta : 1_{\mathcal{B}} \to UL$ - изоморфизм

[3] И. Букур, А. Деляну. Введение в теорию категорий и функторов. - М.: Мир, 1972. Предложение I.1.13'

Рефлективные подкатегории

Формула для ω указана на диаграмме (5) на стр.25: $\omega_{A,B}(\beta) = \varepsilon_A L(\beta)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,A') \arrow[rr, "U_{A,A'}"] \arrow[dr, "\mathcal{A}(\varepsilon_A, 1_{A'})"'] & & \mathcal{B}(UA,UA') \arrow[dl, "\omega_{A',UA}"] \\
& \mathcal{A}(LUA,A') &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & U(\alpha) \arrow[d, mapsto] \\
\alpha\varepsilon_A & \omega_{A',UA}(U(\alpha))
\end{tikzcd}$$

С помощью формулы (5) получаем $\omega_{A',UA}(U(\alpha)) = \varepsilon_{A'} L(U(\alpha))$. В силу естественности ε коммутативен квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & A' \\
LUA \arrow[u, "\varepsilon_A"] \arrow[r, "LU\alpha"'] & LUA' \arrow[u, "\varepsilon_{A'}"']
\end{tikzcd}$$

Отсюда вытекает коммутативность диаграммы (6). Поскольку $\omega_{A',UA}$ биекции, то $U_{A,A'}$ биективны $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}(\varepsilon, 1_{A'})$ биективны $\Leftrightarrow$ ε_A – изоморфизмы.[4]

[4] Подкатегория называется рефлективной, если функтор вложения полон и обладает левым сопряженным

Слайс категория и конинициальное семейство

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор. Для каждого $B \in \mathcal{B}$ комма-категорией (или слайс-категорией) называется категория, объектами которой являются пары $(A, \lambda : B \to UA)$, а морфизмы между (A, λ) и (A', λ') задаются морфизмами $f : A \to A'$ в $\mathcal{A}$ делающие коммутативными треугольник

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\lambda'"'] & & U(A) \arrow[dl, "U(f)"] \\ & U(A') & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (A, \lambda) \arrow[d, "f"'] \\ (A', \lambda') \end{tikzcd}$$

Универсальная стрелка $B \to UA$ существует, если и только если комма-категория B/U обладает инициальным объектом.

Определение

Категория $\mathcal{C}$ называется обладающей разрешающим (или конинициальным) семейством, если существует множество I и семейство объектов $K_i \in Ob\mathcal{C}$ такое, что для каждого объекта $C \in \mathcal{C}$ найдутся $i \in I$ и морфизм $K_i \to C$.

Критерий существования инициального объекта

Одна из задач, приводящая к нахождению инициального объекта - проблема семантики[5] определения по индукции (рекурсии). Пусть $F : Set \to Set$ - функтор. F-алгеброй называется пара (A, α) состоящая из множества A и отображения $\alpha : F(A) \to A$. Морфизм F-алгебр называется гомоморфизмом.

Определение

Инициальный объект μF категории F-алгебр называется инициальной алгеброй. Рекурсия определяется как единственный гомоморфизм $\mu F \to (A, \alpha)$.[a]

[a] J. Adámek, S. Milius, S. Lawrence. On well-founded and recursive coalgebras. Cham: Springer. Lect. Notes Comput. Sci. 12077, 17-36 (2020).

Например, для функтора $F(X) = X + 1 = X \cup \{X\}$ существует инициальная F-алгебра неотрицательных целых $\mathbb{N}$ в которой $\mathbb{N} + 1 \to \mathbb{N}$ опредеделено как $n \mapsto n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \mapsto 0$. Для каждой F-алгебры (A, α), с $\alpha(\mathbb{N}) = a$, гомоморфизм $f(0) = a$ и $f(n + 1) = \alpha(f(n))$ будет рекурсией.

[5] Под семантикой мы понимаем построение множества с отношениями

Критерий существования инициального объекта

Заметим, что во всякой полной категории существует финальный объект. Он изоморфен пределу диаграммы, определенной на пустой категории.

Лемма

Пусть $\mathcal{C}$ – полная (и локально малая) категория обладающая разрешающим семейством объектов. Тогда $\mathcal{C}$ имеет инициальный объект.

Доказательство.[6] Пусть $\{K_i\}_{i\in I}$ - разрешающее семейство в $\mathcal{C}$. Тогда произведение $W = \prod_{i\in I} K_i \in \mathcal{D}$ имеет морфизмы $W \to C$ для всех $C \in \mathcal{C}$, заданные как композиции $W = \prod K_i \xrightarrow{p_i} K_i \to C$. W - "слабо инициальный объект".

Теперь забудем о семействе $\{K_i\}_{i\in I}$. Достаточно существования объекта W допускающего морфизм в каждый объект категории $\mathcal{C}$.

[6] С. Маклейн. Категории для работающего математика. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

Критерий существования инициального объекта

Продолжение доказательства леммы. Пусть $\varepsilon : V \to W$ - уравнитель множества всех эндоморфизмов объекта W. Для каждого $C \in \mathcal{C}$ существует стрелка $W \to C$ и стрелка $V \to C$ равная композиции $V \xrightarrow{\varepsilon} W \to C$.

Мы видим, что V – кандидат на должность инициального объекта. Пусть заданы две стрелки $f, g : V \to C$, возьмем их уравнитель ε_1, как это показано на следующей диаграмме.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varepsilon_1"'] & V \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[d, "\varepsilon"] & C \\
 & W \arrow[ul, "s"] &
\end{tikzcd}$$

Тогда $\delta\varepsilon = \varepsilon$ для всех $\delta : W \to W$. Значит $\varepsilon\varepsilon_1 s\varepsilon = \varepsilon$. Но ε является уравнителем и, значит, мономорфизмом; сокращение на ε слева приводит к равенству $\varepsilon_1 s\varepsilon = 1_V$. Таким образом, ε_1 является ретракцией. Аналогично ε_1 является мономорфизмом, как уравнитель. Следовательно ε_1 есть изоморфизм и $f = g$. Мы доказали, что V – инициальный объект в $\mathcal{C}$.

Критерий представимости

Мы рассмотрели одно из достаточных условий представимости функтора "Если $U : \mathcal{C} \to Set$ имеет сопряженный слева, то он представим" (Предложение на стр. 28). Интерес к этой теме связан с теоремой Брауна[7] о представимости. См. также книгу[8]. Доказанная лемма позволяет получить необходимые и достаточные условия. Пусть $U : \mathcal{C} \to Set$ - функтор. Для функтора $H^C : \mathcal{C} \to Set$ пара $(1, \widetilde{1_C} : 1 \to H^C(C))$ будет универсальной стрелкой. Здесь $\widetilde{x}(0) = x$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\widetilde{1_C}"] \arrow[dr, "\widetilde{\gamma}"'] & & H^C(C) \arrow[dl] \\
& H^C(C') &
\end{tikzcd}$$

Он будет изоморфен H^C для некоторого $C \in \mathcal{C}$, если и только если категория $1/U$ имеет инициальный объект. Если $1/U$ полна, то к ней можно применить критерий существования инициального объекта.

[7] Brown, E. H. (1962). Cohomology theories. Annals of Mathematics, Vol. 75, No. 3, 467-484.

[8] Э. Спеньер. Алгебраическая топология. - М. Мир, 1971 . Глава 7, §7

Критерий представимости

Лемма

Пусть $\mathcal{C}$ - (мало) полная категория и пусть задан непрерывный функтор $F : \mathcal{C} \to Set$. Тогда категория $1/F$ полна.

Доказательство Рассмотрим диаграмму $D : J \to 1/F$ и докажем, что она имеет предел в категории $1/F$. С этой целью будем рассматривать категорию $1/F$ как состоящую из пар $(c \in \mathcal{C}, x \in F(c))$, морфизмами между такими парами $(c, x) \to (c', x'))$ служат морфизмы $\alpha : c \to c'$, такие, что $F(\alpha)(x) = x'$.

Обозначим значения диаграммы D на j через $(c_j, x_j \in F(c_j))$. Категория $\mathcal{C}$ полна, и функтор F перестановочен с пределами. Значит существует предел $c = \varprojlim_{j \in J} c_j \in \mathcal{C}$ и $F(\varprojlim c_j) = \varprojlim F(c_j)$, откуда существует $x \in F(\varprojlim c_j)$, который проекции предела отображают в $x_j \in F(c_j)$. Пара $(c, x \in F(c))$ будет пределом диаграммы D. Следовательно, категория $1/F$ полна.

Критерий представимости

Согласно критерию существования инициального объекта, $1/F$ имеет инициальный объект (и значит) представим, если и только если $\exists$(множество) $I \subseteq Ob\mathcal{C}$ & $\exists$ семейство пар $(C_i, 1 \xrightarrow{x_i} F(C_i))_{i \in I}$ такое, что $\forall (C \in Ob\mathcal{C}, 1 \xrightarrow{x} F(C))$ найдутся $i \in I$ и $t : C_i \to C$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "x_i"] \arrow[dr, "x"'] & & F(C_i) \arrow[dl, "F(t)"] \\
& F(C) &
\end{tikzcd}$$

Следствие

Функтор $F : \mathcal{C} \to Set$ представим тогда и только тогда, когда он непрерывен и выполнено следующее условие: $\exists$ множество I, семейство $C_i \in \mathcal{C}$ и семейство $x_i \in F(C_i)$ такое, что для всякой пары $(C \in \mathcal{C}, x \in F(C)$ существует $i \in I$ и морфизм $f : C_i \to C$, удовлетворяющие равенству $F(f)(x_i) = x$.

Теорема Фрейда

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ мало полная категория и $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор. Функтор U будет имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда он сохраняет малые пределы и выполнено следующее условие: $\forall B \in \mathcal{B}\ \exists$ (множество) I и семейство $(f_i : B \to UA_i)_{i\in I}$, такие что $\forall h : B \to UA\ \exists i \in I\ \exists t : A_i \to A$ делающие коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "h"'] & & UA_i \arrow[dl, "Ut"] \\
& UA &
\end{tikzcd}$$

Условие равносильно тому, что для каждого $B \in Ob\,\mathcal{B}$ категория B/U имеет кониниициальное множество. Остается доказать, что B/U – полная и локально малая для каждого $B \in \mathcal{B}$. Она локально мала, ибо $\mathcal{A}$ локально мала. Доказательство полноты можно свести к доказательству существования произведений и уравнителей в B/U.

Подобъекты

Пусть A – объект категории $\mathcal{A}$. Мономорфизмы $\mu : B \to A$ и $\mu' : B' \to A$ составляют предупорядоченное множество, с отношением предпорядка $\mu \to \mu'$, если существует коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, dashed, "\exists"'] & & A \\ & B' \arrow[ur, "\mu'"'] & \end{tikzcd}$$

Если $\mu \xrightarrow{\exists} \mu'$ и $\mu' \xrightarrow{\exists} \mu$, то они называются эквивалентными. Подобъектами объекта A называются классы эквивалентности мономорфизмов $B \to A$.

Порождающие семейства

Объект I категории $\mathcal{A}$ называется порождающим, или интегральным [9], если для любой пары не равных морфизмов $f, g : A \rightrightarrows A'$ существует морфизм $h : I \to A$ такой, что $fh \neq gh$. Например, 1 порождает Set, $\mathbb{Z}$ порождает категорию групп.

Предложение

Если категория $\mathcal{A}$ имеет порождающий объект, то она изоморфна некоторой подкатегории категории множеств.

Вложение строится с помощью функтора $h^I = \mathcal{A}(I, -) : \mathcal{A} \to Set$.

Множество $\mathcal{S} \subseteq Ob\,\mathcal{A}$ называется порождающим категорию $\mathcal{A}$, если для каждой пары морфизмов $f, g : A \rightrightarrows A'$ существует объект $S \in \mathcal{S}$ и морфизм $h : S \to A$ такой, что $fh \neq gh$.

Двойственно, $\mathcal{Q} \subseteq Ob\,\mathcal{A}$ называется копорождающим, если для каждой пары морфизмов $f, g : A \rightrightarrows A'$ существует объект $Q \in \mathcal{Q}$ и морфизм $h : A' \to Q$ такой, что $hf \neq hg$.

[9] И. Букур, А. Деляну. Введение в теорию категорий и функторов. - М.: Мир, 1972. С. 38

Специальная теорема о сопряженном функторе

Сначала о признаке существования инициального объекта.

Теорема

Пусть категория $\mathcal{A}$ полна в малом, локально мала и имеет малое копорождающее множество $\mathcal{Q}$ и пусть для каждого множества подобъектов любого объекта $A \in \mathcal{A}$ существует пересечение. Тогда $\mathcal{A}$ имеет инициальный объект.

Приведем классический вариант специальной теоремы о сопряженном функторе (SAFT). Функтор называется непрерывным, если он сохраняет все малые пределы.

Теорема

Пусть категория $\mathcal{A}$ полна в малом, имеет малые множества подобъектов, локальна мала и имеет малое копорождающее множество, а категория $\mathcal{B}$ локально мала. Тогда функтор $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ имеет левый сопряженный, если и только если он непрерывен.

Специальная теорема о сопряженном функторе

Пример

Рассмотрим функтор вложения $U : CompHaus \subset Top$. Категория $CompHaus$ имеет пределы (вытекает из теоремы Тихонова о компактности произведения компактных пространств). Пределы пространств из $CompHaus$ лежат в $CompHaus$, значит функтор вложения непрерывен. Обе категории локально малы. Копорождающий объект равен I, по лемме Урысона. Следовательно, существует левый сопряженный к U.

Задача построения расширений функтора

Пусть $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – функтор между малыми категориями. Рассмотрим функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Требуется расширить его на $\mathcal{D}$. Попытки расширения

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{D} \arrow[dl, dotted, "G"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

приводят к категории пар (G, ξ), состоящих из функторов $G : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ и морфизмов $\xi : F \to GS$. Морфизмы $(G, \xi) \xrightarrow{\zeta} (G', \xi')$ задаются морфизмами $\zeta : G \to G'$ для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\xi'"'] & & GS \arrow[dl, "\zeta * S"] \\ & G'S & \end{tikzcd}$$

Здесь $\zeta * S$ определено по правилу Годемана: $(\zeta * S)_j = \zeta_{S(j)}$.

Определение расширения Кана

Пусть $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – функтор между малыми категориями, и $\mathcal{A}$ – произвольная категория. Рассмотрим функтор $S^* = (-) \circ S : \mathcal{A}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, $F \mapsto F \circ S$, $\eta \mapsto \eta \star S$. Левый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *левым расширением Кана* и обозначается $Lan^S : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$. Правый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *правым расширением Кана* .

Пример

Пусть $i : H \subseteq G$ – вложение подгруппы в группу. Для любого $H-$модуля $M \in Ab^H$ индуцированный модуль [a]

$$Ind_H^G M = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

будет изоморфен $Lan^i M$, а коиндуцированный модуль

$$Coind_H^G M = Ab^H(\mathbb{Z}[G], M)$$

изоморфен $Ran_i M$.

[a] К. С. Браун, Когомологии групп. - М.: Наука, 1987

Расширения Кана

Согласно определению сопряженных функторов, функторы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \arrow[r, bend left, "Lan^S"] & \mathcal{A}^{\mathcal{D}} \arrow[l, bend left, "(-)\circ S"] \end{tikzcd}$$

связаны естественной биекцией

$$\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(Lan^S F, G) \cong \mathcal{A}^{\mathcal{C}}(F, G \circ S) \ .$$

В этом случае пара $(Lan^S F, \eta_F)$ будет универсальной стрелкой:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\eta_F"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & & (Lan^S F) \circ S \arrow[dl, dashed, "\overline{\varphi} * S"] & Lan^S F \arrow[d, "\exists!\overline{\varphi}"] \\ & G \circ S & & G \end{tikzcd}$$

Формулы для вычисления расширений Кана

Пусть $d \in Ob\mathcal{D}$ – объект. Напомним, что S/d обозначает *комма–категорию*. Объектами этой категории являются пары, состоящие из объекта $c \in \mathcal{C}$ и морфизма $\alpha : S(c) \to d$, а морфизмы $(c, \alpha) \to (c', \alpha')$ задаются морфизмами $\beta : c \to c'$, удовлетворяющими соотношению $\alpha' \circ \beta = \alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
(c,\alpha) \arrow[dd, "\beta"'] \\
\\
(c',\alpha')
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
S(c) \arrow[dd, "S(\beta)"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
& d \\
S(c') \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Обозначим через $Q_d : S/d \to \mathcal{C}$ забывающий функтор.

Формулы для вычисления расширений Кана

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – категория с копределами. Левое расширение Кана функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ вдоль $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ можно определить как функтор, принимающий значения

$$Lan^S F(d) = \varinjlim \left(S/d \overset{Q_d}{\to} \mathcal{C} \overset{F}{\to} \mathcal{A} \right).$$

Доказательство. Пусть задано естественное преобразование $\varphi : F \to G \circ S$. Построим естественные по d морфизмы $\varinjlim^{S/d} FQ_d \to G(d)$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$S/d \overset{Q_d}{\to} \mathcal{C} \underset{G\circ S}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{A}.$$

Для всех $(c, \alpha) \in S/d$ морфизмы $G(\alpha) : G(S(c)) \to G(d)$ дают коммутативные диаграммы

Формулы для вычисления расширений Кана

$$\begin{tikzcd}
GSQ_d(c_1, \alpha_1) \arrow[dr, "G(\alpha_1)"] \arrow[dd, "GSQ_d(\beta)"'] & \\
& G(d) \\
GSQ_d(c_2, \alpha_2) \arrow[ur, "G(\alpha_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

которые составляют естественное преобразование $GSQ_d \to \Delta_{S/d} G(d)$. Композиция $FQ_d \to GSQ_d \to \Delta_{S/d} G(d)$ после перехода к прямому пределу приводит к искомым морфизмам $\overline{\varphi}_d : \varinjlim^{S/d} FQ_d \to G(d)$. Можно проверить непосредственно, что отображение, сопоставляющее каждому естественному преобразованию $\varphi : F \to G \circ S$ естественное преобразование $\overline{\varphi}_d$ будет биекцией.

Мы избежим этого, указав универсальную стрелку.

Формулы для вычисления расширений Кана

Пусть $\nu_{(c_1,\alpha_1:Sc_1\to Sc)} : F(c_1) \to \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc}$ – канонические морфизмы копредела. Положим $(\eta_F)_c : F(c) \to \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc}$ равным $\nu_{(c,1_{Sc}:Sc\to Sc)}$. Легко видеть, что коммутативна диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
F(c) \arrow[rr, "(\eta_F)_c"] \arrow[dr, "\varphi_c"'] & & \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc} \arrow[dl, dashed] & & \varinjlim^{S/d} FQ_d \arrow[dl] \\
& GS(c) & & G(d) &
\end{tikzcd}
$$

Следовательно, η_F – универсальная стрелка, а функтор $\{\varinjlim^{S/d} FQ_d\}_{d\in\mathcal{D}}$ сопряженным слева к $(-)\circ S$.

Следствие

Пусть 1 категория с $Ob1 = \{0\}$, $Mor1 = \{1_0\}$. Тогда для любых функторов $S : \mathcal{C} \to 1$ и $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ в кополную категорию $\mathcal{A}$, верно $Lan^S F(0) = \varinjlim^{\mathcal{C}} F$.

Метод построения сопряженных функторов

Пусть $\mathcal{C}$ – кополная категория. Тогда с каждой малой категорией $\mathbb{D}$ и функтором $H : \mathbb{D} \to \mathcal{C}$ связан функтор

$$D : \mathcal{C} \to Set^{\mathbb{D}^{op}},$$

принимающий на объектах $C \in \mathcal{C}$ значения $D(C) = \mathcal{C}(H(-), C)$. Морфизму $f : C \to C'$ сопоставляется естественное преобразование, имеющее компоненты

$$\mathcal{C}(H(d), C) \xrightarrow{\mathcal{C}(H(d),f)} \mathcal{C}(H(d), C'),$$

сопоставляющие каждому морфизму $H(d) \xrightarrow{g} C$ композицию $f \circ g$ морфизмов

$$H(d) \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} C'$$

Метод построения сопряженных функторов

Теорема

Пусть $\mathcal{C}$ – кополная, а $\mathbb{D}$ – малая категории. Пусть функтор $D : \mathcal{C} \to Set^{\mathbb{D}^{op}}$ определен как $D(C) = h_C \circ H^{op}$ для всех $C \in \mathcal{C}$. Тогда для любого функтора $H : \mathbb{D} \to \mathcal{C}$ функтор D имеет левый сопряженный, изоморфный левому расширению Кана $G = Lan^{h_*} H$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, bend right, "D"'] & & Set^{\mathbb{D}^{op}} \arrow[ll, bend right, "G"'] \\
& \mathbb{D} \arrow[ul, "H"] \arrow[ur, "h_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Нужно доказать, что существует естественная по $X \in Set^{\mathbb{D}^{op}}$ биекция

$$Set^{\mathbb{D}^{op}}(X, h_C \circ H^{op}) \xrightarrow{\omega} \mathcal{C}((Lan^{h_*} H)(X), C)\,.$$

Метод построения сопряженных функторов

Рассмотрим произвольное естественное преобразование $\eta : X \to h_C \circ H^{op}$ и построим для него $\omega(\eta)$. В силу естественности η имеют место коммутативные для всех $\alpha : d \to d'$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} X(d) \arrow[r, "\eta_d"] & \mathcal{C}(H(d), C) \\ X(d') \arrow[u, "X(\alpha)"] \arrow[r, "\eta_{d'}"'] & \mathcal{C}(H(d'), C) \arrow[u, "\mathcal{C}(H(\alpha){,}1_C)"'] \end{tikzcd}$$

в которых компоненты η_d естественного преобразования сопоставляют элементам $x \in X(d)$ отображения

$$\eta_d(x) : H(d) \to C\,.$$

Метод построения сопряженных функторов

По формуле для вычисления левого расширения Кана множество $\mathcal{C}((Lan^{h_*}H)(X), C)$ будет равно

$$\mathcal{C}(\varinjlim^{h_*/X} HQ_X, C) \cong \varprojlim_{\widetilde{x}\in h_*/X} \mathcal{C}(H(d), C)\,.$$

Стало быть, его элементы можно рассматривать как нити $(\xi_{\widetilde{x}})_{\widetilde{x}\in h_*/X}$ – семейства морфизмов, делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H(d) \arrow[dr, "\xi_{\widetilde{x}}"] & \\
 & C \\
H(d') \arrow[uu, "H(\alpha)"] \arrow[ur, "\xi_{\widetilde{x}'}"'] &
\end{tikzcd}$$

для любых морфизмов $\widetilde{x} \xrightarrow{\alpha} \widetilde{x}'$ категории h_*/X.

Метод построения сопряженных функторов

Естественному преобразованию $\eta : X \to h_C \circ H^{op}$ можно сопоставить семейство морфизмов $\xi_{\widetilde{x}} = \eta_d(x) \in \mathcal{C}(H(d), C)$, где $\widetilde{x}$ пробегает все объекты категории h_*/X. Для того, чтобы установить, что эти семейства будут нитями, проверим равенства $\xi_{\widetilde{x}} \circ H(\alpha) = \xi_{\widetilde{x'}}$:

$$\xi_{\widetilde{x'}} = \eta_{d'}(x') \in \mathcal{C}(H(d'), C) \Rightarrow \xi_{\widetilde{x'}} \circ H(\alpha) = \eta_{d'(x')} \circ H(\alpha) = \eta_d(X(\alpha)(x'))\,.$$

Поэтому, в случае $x = X(\alpha)(x')$, будет иметь место равенство $\eta_d(x) = \xi_{\widetilde{x'}} \circ H(\alpha)$, из которого следует $\xi_{\widetilde{x}} = \xi_{\widetilde{x'}} \circ H(\alpha)$. Легко видеть, что полученное отображение $\eta \mapsto (\xi_{\widetilde{x}})$, $\xi_{\widetilde{x}} = \eta_d(x)$, взаимно однозначно, и обратным для него будет отображение, сопоставляющее нити $(\xi_{\widetilde{x}})$ естественное преобразование $\eta_d(x) = \xi_{\widetilde{x}}$. Следовательно, ω будет естественной биекцией.

Все универсальные конструкции можно строить с помощью расширений Кана

Теорема

Пусть $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ - функтор, имеющий левый сопряженный $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Тогда $L \cong Ran_U 1_{\mathcal{A}} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Доказательство. Запишем формулу поточечного вычисления значений правого расширения Кана на объекте $B \in \mathcal{B}$

$$Ran_U 1_{\mathcal{A}}(B) = \varprojlim(B/U \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A} \xrightarrow{1_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}) = \varprojlim(B/U \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A}).$$

Объектами категории $B/\mathcal{A}$ служат пары (A, α), где $A \in Ob\,\mathcal{A}$ и $\alpha : B \to UA$ - морфизм категории $\mathcal{B}$. Морфизмы между парами $(A, \alpha) \xrightarrow{\gamma} (A', \alpha')$ задаются морфизмами $\gamma : A \to A'$ такими, что $U\gamma \circ \alpha = \alpha'$. Поскольку существует $L \dashv U$, то пара $(LB, \eta_B : B \to U(LB))$ будет инициальным объектом (и универсальной стрелкой) категории B/U, откуда $\varprojlim(B/U \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A}) = Q_B(LB, \eta_B) = LB$. Следовательно, $Ran_U 1_{\mathcal{A}} \cong L$.

Производные функторы

Теория производных функторов применяется в гомологической и гомотопической алгебре[10].

Определение

Пусть заданы функторы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, bend left=60, "(L^{\gamma}F)\circ\gamma" description] \arrow[dr, phantom, bend left=25, "\swarrow"] & & \mathcal{A}' \arrow[dl, dotted, "L^{\gamma}F"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Левым производным от F относительно γ называется функтор $L^{\gamma}F : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ с естественным преобразованием $\varepsilon : L^{\gamma}F \circ \gamma \to F$, такой, что

$$(\forall G : \mathcal{A}' \to \mathcal{B})(\forall \zeta : G \circ \gamma \to F)(\exists! \theta : G \to L^{\gamma}F)\varepsilon \cdot \theta * \gamma = \zeta.$$

[10] Quillen, Daniel G. Homotopical algebra. Lecture Notes in Math, Vol. 43. Springer, 2006, ch I, p 4.1

Производные функторы

Последняя строка определения иллюстрируется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
F & & (L^{\gamma}F)\circ\gamma \arrow[ll, "\varepsilon"'] \\
& G\circ\gamma \arrow[ul, "\forall\zeta"] \arrow[ur, "\theta*\gamma"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& L^{\gamma}F \\
G \arrow[ur, dashed, "\exists!\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Терминология производных функторов была введена Вердье[11] в 1967. Он рассматривал случай $\mathcal{A} = K(\mathscr{A})$ - категория комплексов абелевой категории по модулю гомотопии, $\mathcal{A}' = D(\mathscr{A})$ - ее категория частных относительно квазиизоморфизмов. Двойственно определяются правые производные.

Предложение

Левый производный от F относительно γ равен правому расширению Кана функтора F вдоль функтора γ. А правый производный - левому расширению Кана.

[11] Verdier, Jean-Louis. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. Société mathématique de France, 1996.

Производные функторы

Напомним определение локализующей категории (категории частных, гомотопической категории).
Рассмотрим произвольную категорию $\mathcal{C}$ и класс морфизмов $W \subseteq Mor\,\mathcal{C}$.
Существует функтор определенный на $\mathcal{C}$ и являющийся универсальным по отношению к функторам, переводящим морфизмы из W в изоморфизмы[12]

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\forall f : f(W) \subseteq Iso\,\mathcal{D}"'] & & \mathcal{C}[W^{-1}] \arrow[dl, "\exists ! g"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

и называющийся локализующим. В книге[13] рассмотрен случай модельной категории Квиллена $\mathcal{C}$ с классом слабых эквивалентностей W.
Гомотопической категорией $Ho(\mathcal{C})$ называется категория $\mathcal{C}[W^{-1}]$.

[12]Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры. - М. Наука, 1988, гл.III, §2.2, с.173

[13]Quillen, Daniel G. Homotopical algebra. Lecture Notes in Math, Vol. 43. Springer, 2006, ch I, p 4.2

Производные функторы

Проблемы исследования категорий с выделенными классами слабых гомотопических эквивалентностей помогает решать с помощью следующего определения[14]:

Определение

Пусть $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ - функтор между модельными категориями. Его тотальный левый производный функтор $LF : Ho\,\mathcal{C} \to Ho\,\mathcal{C}'$ определяется с помощью формулы $LF = L^{\gamma}(\gamma' \circ F)$, где $\gamma : \mathcal{C} \to Ho\,\mathcal{C}$ и $\gamma' : \mathcal{C}' \to Ho\,\mathcal{C}'$ - локализующие функторы.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"'] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "\gamma'"] \\
Ho\,\mathcal{C} \arrow[r, "LF"] & Ho\,\mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

[14] Quillen, Daniel G. Homotopical algebra. Lecture Notes in Math, Vol. 43. Springer, 2006, ch I, p 4.3, Def. 2