

Сопряженные функторы и расширения Кана

Хусаинов А.А.

2021

1 Универсальные стрелки

- Определение универсальной стрелки
- Пополнение метрического пространства
- Фунториальность универсальной стрелки

2 Копределы и пределы

- Диагональ и функторы копредела и предела
- Свойства копределов и пределов
- Критерий полноты категории
- Антиномия Фрейда

3 Сопряженные функторы

- Определение сопряженных функторов
- Три способа задания сопряженных функторов
- Свойства сопряженных функторов

4 Представимость и существование левого сопряженного

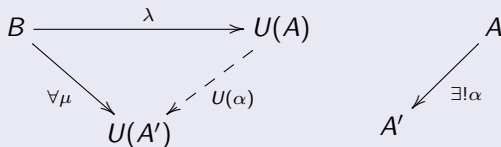
- Слайс категория и конинициальное семейство
- Критерий существования инициального объекта
- Критерий представимости
- Теорема Фрейда о существовании левого сопряженного
- Специальная теорема о сопряженном функторе

5 Расширения Кана

- Определение расширения Кана
- Поточечное расширение Кана
- Метод построения сопряженных функторов
- Приложения расширений Кана

Определение универсальной стрелки

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – функтор. Универсальной стрелкой для $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$ называется пара $(A, \lambda : B \rightarrow U(A))$, состоящая из такого объекта $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ и морфизма $\lambda \in \mathcal{B}(B, U(A))$, что для любого объекта $A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ и морфизма $\mu : B \rightarrow U(A')$ существует единственный морфизм $\alpha : A \rightarrow A'$, удовлетворяющий равенству $U(\alpha) \circ \lambda = \mu$. Это свойство изображается с помощью диаграммы

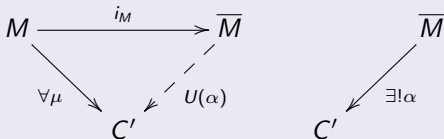


Пример: пополнение метрического пространства

Пусть $\mathcal{B} = \text{Metr}$ – категория метрических пространств и равномерно непрерывных отображений, $\mathcal{A} = \overline{\text{Metr}}$ – ее полная подкатегория, состоящая из полных метрических пространств, U – полное вложение

$$\overline{\text{Metr}} \subset \text{Metr}$$

По теореме Хаусдорфа, для всякого $M \in \text{Metr}$ существует изометрия $i_M : M \subseteq \overline{M}$ в полное метрическое пространство, причем образ вложения i_M плотен в \overline{M} . Мы утверждаем, что (\overline{M}, i_M) – универсальная стрелка.



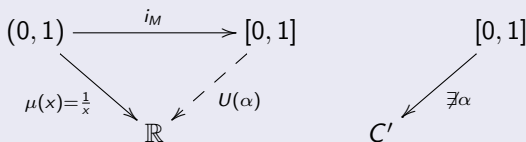
Каждый $x \in \overline{M}$ равен классу эквивалентности $cls(x_n)$ некоторой фундаментальной последовательности (x_n) . Значит, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ в \overline{M} . Поскольку (μx_n) фундаментальна, то верно равенство $\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(x_n)$.

Контрпример

Пусть $\mathcal{B} = \text{Metr}$ – категория метрических пространств и непрерывных отображений, $\mathcal{A} = \overline{\text{Metr}}$ – ее полная подкатегория, состоящая из полных метрических пространств, U – полное вложение

$$\overline{\text{Metr}} \subset \text{Metr}$$

Мы утверждаем, что (\overline{M}, i_M) не для всякого метрического пространства M будет универсальной стрелкой. Возьмем $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Ясно $\overline{M} = [0, 1]$. Пусть $\mu(x) = \frac{1}{x}$.



Иначе $\alpha(0) = \frac{1}{0}$. Можно взять также вместо $[0, 1]$ множество действительных чисел, а вместо $(0, 1)$ – множество иррациональных чисел.

Функториальность универсальной стрелки

Предложение

Если для каждого объекта $B \in \mathcal{B}$ можно выбрать универсальную стрелку $(A_B, \lambda_B : B \rightarrow UA_B)$ то отображение $B \mapsto (A_B, \lambda_B)$ единственным образом продолжается до некоторого функтора $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ с естественным преобразованием $\lambda_B : B \rightarrow U\Lambda B$, принимающего значения $\Lambda B = A_B$.

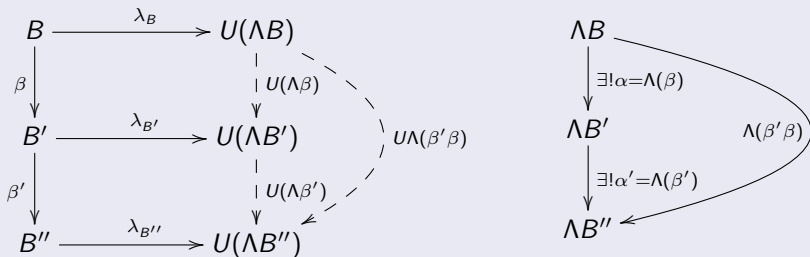
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Обозначим через $\Lambda : Ob(\mathcal{B}) \rightarrow Ob(\mathcal{A})$ отображение, определенное как $\Lambda(B) = A_B$. Для произвольных объекта $B' \in \mathcal{B}$ и морфизма $B \xrightarrow{\beta} B'$ получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\lambda_B} & U(\Lambda B) & & \Lambda B & & (1) \\
 \beta \downarrow & & \downarrow U(\alpha) & & \downarrow \exists! \alpha & & \\
 B' & \xrightarrow{\lambda_{B'}} & U(\Lambda B') & & \Lambda B' & &
 \end{array}$$

Положим $\Lambda(\beta) = \alpha$. Если $\beta = 1_B$, и значит $B' = B$, то $\alpha = 1_{\Lambda B}$ делает квадрат коммутативным, ибо $U(1_{\Lambda B}) = 1_{U\Lambda B}$. Значит, $\Lambda(1_B) = \alpha = 1_{\Lambda B}$.

Проверка равенства $\Lambda(\beta'\beta) = \Lambda(\beta')\Lambda(\beta)$

Рассмотрим морфизмы $B \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{\beta'} B''$. По определению $\Lambda(\beta)$, $\Lambda(\beta')$ и $\Lambda(\beta'\beta)$, коммутативны три квадрата.



Композиция верхнего и нижнего квадрата дает тоже коммутативный квадрат, совпадающий с внешним. Отсюда $\Lambda\beta'\Lambda\beta = \Lambda(\beta'\beta)$. Диаграмма (1) на стр. 6 показывает, что морфизмы (λ_B) будут составлять естественное преобразование $1_B \rightarrow U\Lambda$.

Определение функториальной универсальной стрелки

Пример

Пополнение метрического пространства $M \mapsto \overline{M}$ функториально. Отсюда получаем функтор пополнения категории нормированных пространств и ограниченных линейных отображений на категорию банаховых пространств.

Определение

Функториальной универсальной стрелкой по отношению к функтору $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ называется функтор $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ и естественное преобразование $\eta : 1_{\mathcal{B}} \rightarrow U\Lambda$, такое, что для всякого $B \in \mathcal{B}$ пара $(\Lambda(B), \eta_B : B \rightarrow U\Lambda(B))$ будет универсальной стрелкой.

Функторы копредела и предела

(Копредел) Пусть J – малая категория, и \mathcal{A}^J – категория функторов $F : J \rightarrow \mathcal{A}$ и естественных преобразований. Рассмотрим функтор диагонали

$$\Delta_J = \Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^J,$$

сопоставляющий каждому $A \in Ob(\mathcal{A})$ функтор $J \rightarrow \mathcal{A}$ принимающий постоянные значения $(\Delta A)(j) = A$ – на объектах $j \in J$ и $\Delta A(\alpha) : \Delta A \rightarrow \Delta A'$ – на морфизмах, определенные как $\Delta(\alpha)_j = \alpha : A \rightarrow A'$.

Определение

Если существует универсальная стрелка $(A, \lambda : F \rightarrow \Delta A)$, то объект A вместе с естественным преобразованием λ называется копределом $\varinjlim^J F$.

Морфизмы $\lambda_j : F(j) \rightarrow \varinjlim^J F$ составляют конус копредела. Аналогично определяется предел $\varprojlim_J F$ с помощью коуниверсальной стрелки $(A, \rho : \Delta A \rightarrow F)$.

Функторы копредела и предела

Пусть \mathcal{C} – малая категория, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ – функтор. Пределом $\varprojlim_{\mathcal{C}} F$ называется пара, состоящая из такого объекта $\varprojlim_{\mathcal{C}} F \in \text{Ob } \mathcal{A}$ и семейства морфизмов $\{p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \rightarrow F(c)\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}}$, что для каждого морфизма $\alpha : a \rightarrow b$ категории \mathcal{C} коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \varprojlim_{\mathcal{C}} F & \\ p_a \swarrow & & \searrow p_b \\ F(a) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(b) \end{array}$$

которая называется конусом морфизмов над функтором F .
Этот конус должен быть универсальным, в следующем смысле:

Функторы копредела и предела

Для любого другого конуса $\{\pi_c : A \rightarrow F(c)\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}}$, над F с вершиной A

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \pi_a \swarrow & & \searrow \pi_b \\
 F(a) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(b)
 \end{array}$$

существует единственный морфизм $u : A \rightarrow \varprojlim_c F$, такой, что при всех $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \overset{\exists! u}{\dashrightarrow} & \varprojlim_c F \\
 \pi_c \searrow & & \swarrow \rho_c \\
 & F(c) &
 \end{array}$$

Морфизмы $\rho_c : \varprojlim_c F \rightarrow F(c)$ называются *проекциями предела*.

Свойства копределов и пределов

Лемма

Семейство проекций предела $p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \rightarrow F(c)$ мономорфно в том смысле, что одновременное выполнение равенств $p_c \circ f = p_c \circ g$ для всех $c \in \mathcal{C}$ влечет $f = g$.

В случае, когда \mathcal{C} – дискретная категория, функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ будет в точности семейством объектов $F(c) = A_c \in \mathcal{A}$. В этом случае предел называется произведением $\prod_{c \in \mathcal{C}} A_c$, а проекции предела – проекциями произведения.

Пример

Если категория \mathcal{A} является частично упорядоченным множеством, то произведением $\prod_{i \in I} A_i$ будет точная нижняя грань $\inf \{A_i : i \in I\}$ элементов $A_i \in \mathcal{A}$.

Свойства копределов и пределов

Определение

Если \mathcal{C} состоит из двух объектов a, b и двух морфизмов $p, q : a \rightarrow b$ (и тождественных морфизмов $1_a, 1_b$), то предел функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ называется уравнителем

Категория \mathcal{A} имеет пределы для функторов из заданного класса, если для каждого функтора из этого класса существует предел. В частности, свойство “имеет произведения” означает, что для любых множества I и семейства объектов $\{A_i\}_{i \in I}$ существует произведение $\prod_{i \in I} A_i$.

Свойства копределов и пределов

Уравнителем пары морфизмов $A \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{matrix} B$ является пара (E, λ) , состоящая из объекта E и морфизма $\lambda : E \rightarrow A$ таких, что $\alpha \circ \lambda = \beta \circ \lambda$, и для любых других (E', λ') , удовлетворяющих $\alpha \circ \lambda' = \beta \circ \lambda'$, существует единственный морфизм $f : E \rightarrow E'$, для которого $\lambda \circ f = \lambda'$. Обозначим пару (E, λ) через $Eq(\alpha, \beta)$.

Предложение

Пусть (E, λ) – уравнитель некоторой пары морфизмов. Тогда λ – мономорфизм.

Такие мономорфизмы называются *строгими*.

Пример

В категории множеств Set каждая инъекция $A \subset B$ является уравнителем некоторой пары.

Можно взять пару $f, g : B \rightarrow \{0, 1\}$, $f = \chi_A$, и $(\forall x \in B) g(x) = 1$.

Критерий полноты категории

Теорема

Пусть \mathcal{A} – категория. Следующие свойства категории \mathcal{A} равносильны:

- (i) Для любых малой категории \mathcal{C} и функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ существует предел $\varinjlim_{\mathcal{C}} F$ в категории \mathcal{A} ; в этом случае категория \mathcal{A} называется (мало) полной.
- (ii) Категория \mathcal{A} имеет произведения и уравниатели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) \Rightarrow (i). Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ – функтор. Для каждого $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) & & \prod_{\gamma \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{cod } \gamma) \\
 \downarrow p_{\text{dom } \alpha} & & \downarrow \bar{p}_{\alpha} \\
 F(\text{dom } \alpha) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(\text{cod } \alpha)
 \end{array} \tag{2}$$

где \bar{p}_{α} – проекции произведения $A_{\alpha} = F(\text{cod } \alpha)$.

Критерий полноты категории

Обозначим через

$$q_0 : \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{cod } \gamma)$$

(единственный) морфизм, делающий диаграмму (2) коммутативной.

Проекции

$$p_{\text{cod } \alpha} : \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) \longrightarrow F(\text{cod } \alpha)$$

тоже дают единственный морфизм $q_1 : \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{cod } \gamma)$, для которого $\bar{p}_\alpha \circ q_1 = p_{\text{cod } \alpha}$. Рассмотрим уравнитель (Eq, e) пары морфизмов q_0 и q_1 . Докажем, что пара $(Eq, \{p_c \circ e\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}})$ является пределом функтора F .

Критерий полноты категории

Пусть $(A, \{\pi_c : A \rightarrow F(c)\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}})$ – конус над F , семейство морфизмов, таких, что $F(\alpha) \circ \pi_{\text{dom } \alpha} = \pi_{\text{cod } \alpha}$ для всех $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}$. Существует единственный морфизм $\pi = (\pi_c) : A \rightarrow \prod_c F(c)$, для которого $p_c \circ \pi = \pi_c$ для всех $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Рассмотрим диаграмму, в которой квадрат коммутативен для всех $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}$ при $i = 0$, и $\bar{p}_\alpha \circ q_1 = p_{\text{cod } \alpha}$ при $i = 1$.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\pi} & \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) & \xrightarrow{q_i} & \prod_{\gamma \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{cod } \gamma) \\
 & \searrow \pi_{\text{dom } \alpha} & \downarrow p_{\text{dom } \alpha} & \swarrow p_{\text{cod } \alpha} & \downarrow \bar{p}_\alpha \\
 & & F(\text{dom } \alpha) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(\text{cod } \alpha)
 \end{array}$$

Тогда для каждого $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}$ мы имеем равенства

$$\bar{p}_\alpha \circ q_0 \circ \pi = F(\alpha) \circ p_{\text{dom } \alpha} \circ \pi = F(\alpha) \circ \pi_{\text{dom } \alpha} = \pi_{\text{cod } \alpha} = p_{\text{cod } \alpha} \circ \pi = \bar{p}_\alpha \circ q_1 \circ \pi.$$

Критерий полноты категории

По лемме о том, что семейство морфизмов конуса предела мономорфно, для предела по дискретной категории, семейство проекций \bar{p}_α будет мономорфным. Следовательно, $q_0 \circ \pi = q_1 \circ \pi$.

Наоборот, поскольку верны равенства $p_c \pi = \pi_c$, мы получаем соотношения $\bar{p}_\alpha \circ q_0 \circ \pi = F(\alpha) \circ p_{dom \alpha} \circ \pi = F(\alpha) \circ \pi_{dom \alpha}$ и $\pi_{cod \alpha} = p_{cod \alpha} \circ \pi = \bar{p}_\alpha \circ q_1 \circ \pi$, из которых вытекает, что $(A, \{\pi_c : A \rightarrow F(c)\}_{c \in Ob C})$ будет конусом тогда, и только тогда, когда $q_0 \pi = q_1 \pi$.

Более того, существует изоморфизм между категорией конусов над F и категорией конусов над парой морфизмов q_0 и q_1 соответствующих F .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\pi_c} & F(c) \\
 \uparrow f & \nearrow \pi'_c & \\
 A' & &
 \end{array}
 \quad \mapsto \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\pi} & \prod_{c \in Ob C} F(c) \xrightarrow{q_i} \prod_{\gamma \in Mor C} F(cod \gamma) \\
 \uparrow f & \nearrow \pi' & \\
 A' & &
 \end{array}$$

Функториальность вытекает из $\pi' = \pi f \Leftrightarrow (\forall c) p_c \pi' = p_c \pi f \Leftrightarrow (\forall c) \pi'_c = \pi_c f$.
 Значит существует финальный конус, который и будет пределом функтора F .

Пределы и копределы в категории множеств

Доказательство критерия полноты показывает, что предел изоморфен

уравнителю между морфизмов $\prod_{c \in C} F(c) \begin{array}{c} \xrightarrow{q_0} \\ \xrightarrow{q_1} \end{array} \prod_{\gamma \in \text{Mor}(C)} F(\text{cod } \gamma)$

Corollary

Предел функтора $F : C \rightarrow \text{Set}$ изоморфен множеству семейств $(x_c)_{c \in \text{Ob } C}$, таких, что для всякого $\alpha \in \text{Mor } C$ верно $F(\alpha)(x_{\text{dom } \alpha}) = x_{\text{cod } \alpha}$. Конус предела состоит из отображений $p((x_c)_{c \in \text{Ob } C}) = x_c$.

Такие семейства называются нитями.

Пределы и копределы в категории множеств

Копредел равен коуравнителю пары

$$\prod_{\gamma \in \text{Mor}(\mathcal{C})} F(\text{dom} \gamma) \begin{array}{c} \xrightarrow{r_0} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} \prod_{c \in \mathcal{C}} F(c) \quad , \quad r_0(\alpha, x) = (\text{dom} \alpha, x), \\ r_1(\alpha, x) = (\text{cod} \alpha, F(\alpha)x), \text{ откуда}$$

Corollary

Копредел функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ изоморфен фактормножеству

$\prod_{c \in \text{Ob} \mathcal{C}} F(c) / \equiv$, по наименьшему отношению эквивалентности на $\prod_{c \in \text{Ob} \mathcal{C}} F(c)$ такому, что $(\text{dom} \alpha, x) \equiv (\text{cod} \alpha, F(\alpha)x)$.

Антиномия Фрейда

Теорема

Если малая категория \mathcal{C} полна в малом, то она является предпорядком, в котором каждое множество элементов обладает наибольшей нижней гранью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предпорядок - это такая категория \mathcal{C} , что $(\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C})$
 $|\mathcal{C}(A, B)| \leq 1$. Пусть \mathcal{C} не предпорядок. Тогда существуют две не равных стрелки

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & g & \end{array}$$

Для всякого множества J существует произведение $\prod_{j \in J} B$. Всякая стрелка $A \rightarrow \prod_{j \in J} B$ определена своими компонентами. $2^{|J|}$ стрелок имеют компоненты, состоящие из f и g . Отсюда $|\text{Mor } \mathcal{C}| \geq |\mathcal{C}(A, \prod_{j \in J} B)| \geq 2^{|J|}$. Если взять J мощности большей чем $|\text{Mor } \mathcal{C}|$, то неравенство станет ложным.

Замечание

- 1) Почему предпорядком: Например, состоящей из нулевых объектов.
- 2) Малая категория, обладающая малыми произведениями, будет предпорядком.

Определение сопряженных функторов

Определение

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ – функторы. Функтор L называется левым сопряженным к функтору U , если существует изоморфизм функторов

$$\omega : \mathcal{B}(-, U-) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(L-, =)$$

действующих $\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathit{Set}$.

Изоморфизм означает существование семейства биекций $\omega_{A,B}$ делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(B, UA) & \xrightarrow{\omega_{A,B}} & \mathcal{A}(LB, A) \\
 \mathcal{B}(g, Uf) \downarrow & & \mathcal{A}(Lg, f) \downarrow \\
 \mathcal{B}(B', UA') & \xrightarrow{\omega_{A',B'}} & \mathcal{A}(LB', A')
 \end{array} \tag{3}$$

для всех $f : A \rightarrow A'$, $g : B' \rightarrow B$. Эта биекция записывается как

$$\frac{LB \rightarrow A}{B \rightarrow UA}$$

Три способа задания сопряженных функторов

Теорема

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ – произвольные функторы. Тогда следующие свойства U и L эквивалентны:

- (1) $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ - функториальная универсальная стрелка с естественным преобразованием $1_{\mathcal{B}} \rightarrow UL$.
- (2) Функтор L сопряжен слева к U .
- (3) Существуют естественные преобразования $\eta : 1_{\mathcal{B}} \rightarrow UL$ и $\varepsilon : LU \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$, делающие коммутативными диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{L*\eta} & LUL \\
 & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon*L \\
 & & L
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\eta*U} & ULU \\
 & \searrow 1_U & \downarrow U*\varepsilon \\
 & & U
 \end{array}
 \tag{4}$$

где $(L * \eta)_A = L(\eta_A)$, $(\varepsilon * L)_A = \varepsilon_{LA}$.

Три способа задания сопряженных функторов

Докажем (1) \Rightarrow (2). В силу универсальности стрелок $(LB, \eta_B : B \rightarrow ULB)$ существуют биекции $\omega_{A,B} : \mathcal{B}(B, UA) \rightarrow \mathcal{A}(LB, A)$, сопоставляющие каждому $\beta : B \rightarrow UA$ такой единственный $\alpha : LB \rightarrow A$, что $U(\alpha)\eta_B = \beta$. Для $\omega_{A,B}^{-1}(\alpha) = U(\alpha)\eta_B$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(B, UA) & \xleftarrow{\omega_{A,B}^{-1}} & \mathcal{A}(LB, A) \\
 \mathcal{B}(g, Uf) \downarrow & & \mathcal{A}(Lg, f) \downarrow \\
 \mathcal{B}(B', UA') & \xleftarrow{\omega_{A',B'}^{-1}} & \mathcal{A}(LB', A')
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xrightarrow{\eta_B} & ULB & \xrightarrow{U(\alpha)} & UA & \xleftarrow{\quad} & (LB \xrightarrow{\alpha} A) \\
 & & \mathcal{B}(g, Uf) \downarrow & & & & \mathcal{A}(Lg, f) \downarrow
 \end{array}$$

$B' \xrightarrow{U(f)U(\alpha)\eta_{Bg}} UA' = B' \xrightarrow{U(f\alpha Lg)\eta_{B'}} UA' \xleftarrow{\quad} LB' \xrightarrow{Lg} LB \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{f} A'$
 для всех $f : A \rightarrow A'$, $g : B' \rightarrow B$. Следовательно ω^{-1} - изоморфизм.

Три способа задания сопряженных функторов

(2) \Rightarrow (3). Рассмотрим морфизмы $\eta_B = \omega_{LB,B}^{-1}(1_{LB}) : B \rightarrow ULB$. B , то Для
 всякого $\alpha : LB \rightarrow A$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}(LB, LB) & \xrightarrow{\omega_{LB,B}^{-1}} & \mathcal{B}(B, ULB) \\
 \mathcal{A}(1, \alpha) \downarrow & & \downarrow \mathcal{B}(1, U\alpha) \\
 \mathcal{A}(LB, A) & \xrightarrow{\omega_{A,B}^{-1}} & \mathcal{B}(B, UA)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 1_{LB} & \xrightarrow{\quad} & \eta_B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \alpha & \xrightarrow{\quad} & \omega_{A,B}^{-1}(\alpha) = U(\alpha)\eta_B
 \end{array}$$

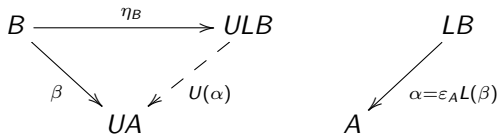
Рассмотрим $\varepsilon_A = \omega_A(1_{UA}) : LUA \rightarrow A$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(UA, UA) & \xrightarrow{\omega_{A,UA}} & \mathcal{A}(LUA, A) \\
 \mathcal{B}(\beta, 1_{UA}) \downarrow & & \downarrow \mathcal{A}(L\beta, 1_A) \\
 \mathcal{B}(B, UA) & \xrightarrow{\omega_{A,B}} & \mathcal{A}(LB, A)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 1_{UA} & \xrightarrow{\quad} & \varepsilon_A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \beta & \xrightarrow{\quad} & \omega_{A,B}(\beta) = \varepsilon_A L(\beta)
 \end{array}
 \tag{5}$$

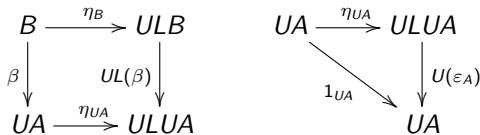
Получаем $\varepsilon_{LB}L(\eta_B) = \omega_{LB,B}(\eta_B) = 1_{LB}$, ибо $\eta_B = \omega_{LB,B}^{-1}(1_{LB})$. Т.о.
 коммутативен первый треугольник диаграммы (4) на стр. 23. Аналогично,
 $U(\varepsilon_A)\eta_{UA} = \omega_{A,UA}^{-1}(\varepsilon_A) = 1_{UA}$ - коммутативен второй. треугольник на стр. 23

Три способа задания сопряженных функторов

(3) \Rightarrow (1). Докажем, что в случае (3) (LB, η_B) будет универсальной стрелкой. С этой целью, для произвольного $\beta : B \rightarrow UA$, возьмем $\alpha = \varepsilon_A L(\beta)$.



Надо доказать $U(\alpha)\eta_B = \beta$. Сначала подставим вместо α морфизм $\varepsilon_A L(\beta)$: $U(\alpha)\eta_B = U(\varepsilon_A L(\beta))\eta_B = U(\varepsilon_A)UL(\beta)\eta_B$. Затем воспользуемся квадратом, показанном ниже, коммутативным, в силу естественности η и треугольником, полученным из второго треугольника на рис. (4) на стр. 23.



Это приводит к равенствам $U(\varepsilon_A)UL(\beta)\eta_B = U(\varepsilon_A)\eta_{UA}\beta = \beta$.

Три способа задания сопряженных функторов

Т.о. $\alpha : LB \rightarrow A$ существует. Кроме того, мы доказали импликацию $\alpha = \varepsilon_A L(\beta)$, то $\beta = U(\alpha)\eta_B$. Аналогично доказывается обратная импликация. Отсюда α является единственным: если $\beta = U(\alpha')\eta_B$, то $\alpha' = \varepsilon_A L(\beta) = \alpha$.

Свойства сопряженных функторов

Предложение

Если функтор $U : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ имеет сопряженный слева, то U представим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹ Пусть L - левый сопряженный. Естественные изоморфизмы $UA \cong \text{Set}(1, UA) \cong \mathcal{A}(L1, A)$ показывают, что U - представим.

Следствие

Если $L \dashv U$ и $F \dashv V$, то композиции $A \begin{array}{c} \xleftarrow{L} \\ \xrightarrow{U} \end{array} B \begin{array}{c} \xleftarrow{F} \\ \xrightarrow{V} \end{array} C$ будут сопряжены:
 $L \circ F \dashv V \circ U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО $\mathcal{A}(LF(-), =) \cong \mathcal{B}(F(-), U(=)) \cong \mathcal{C}(-, VU(=))$.

¹S. Awodey. Category Theory. Oxford University Press, 2010

Свойства сопряженных функторов

Следствие

Если $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ имеет левый сопряженный L , то для всякой категории \mathcal{C} функтор L^c сопряжен слева к $U^c : \mathcal{A}^c \rightarrow \mathcal{B}^c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано не третьем способе задания сопряженных функторов. Функтор L^c умножает функторы и естественные преобразования слева на $L : F \mapsto L \circ F$, $\xi \mapsto L * \xi$. Верно также $(\zeta * F)_c = \zeta_{F(c)}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{L*\eta} & LUL & \Rightarrow & L(Fc) & \xrightarrow{L(\eta_{Fc})} & LUL(F(c)) & \Rightarrow & LF & \xrightarrow{(L*\eta)*F} & LULF \\
 \searrow 1_L & & \downarrow \varepsilon*L & & \searrow 1_{LFc} & & \downarrow \varepsilon_{LFc} & & \searrow 1_L & & \downarrow (\varepsilon*L)*F \\
 & & L & & & & L(F(c)) & & & & LF
 \end{array}$$

Перестановочность с пределами

Следствие

Если функтор $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ имеет сопряженный слева, то U перестановочен с пределами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диграмму состоящую из функторов и диграмму функторов, сопряженных справа к функторам этой диграммы.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}^c & \xleftarrow{L^c} & \mathcal{B}^c \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta \\
 \mathcal{A} & \xleftarrow{L} & \mathcal{B}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}^c & \xrightarrow{U^c} & \mathcal{B}^c \\
 \downarrow \varprojlim & & \downarrow \varprojlim \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{U} & \mathcal{B}
 \end{array}$$

Поскольку правый сопряженный функтор к композиции равен композиции сопряженных функторов, то вторая диграмма коммутативна. Следовательно для всякого $F \in \mathcal{A}^c$ верно $U(\varprojlim F) \cong \varprojlim (U \circ F)$.

Рефлективные подкатегории

Функтор $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ называется вполне унивалентным, если отображения на морфизмах $U_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(UA, UA')$ биективны для всех $A, A' \in \text{Mor } \mathcal{A}$.

Следствие

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ - функторы такие, что L сопряжен слева к U . Тогда функтор U будет вполне унивалентен, если и только если единица сопряжения $\varepsilon : LU \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ является изоморфизмом.

² ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ³ Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}(A, A') & \xrightarrow{U_{A,A'}} & \mathcal{B}(UA, UA') \\
 & \searrow \mathcal{A}(\varepsilon_A, 1_{A'}) & \swarrow \omega_{A', UA} \\
 & & \mathcal{A}(LUA, A')
 \end{array} \tag{6}$$

² Двойственно L - вполне унивалентен $\Leftrightarrow \eta : 1_{\mathcal{B}} \rightarrow UL$ - изоморфизм

³ И. Букур, А. Деляну. Введение в теорию категорий и функторов. - М.: Мир, 1972. Предложение I.1.13'

Рефлексивные подкатегории

Формула для ω указана на диаграмме (5) на стр.25: $\omega_{A,B}(\beta) = \varepsilon_A L(\beta)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}(A, A') & \xrightarrow{U_{A,A'}} & \mathcal{B}(UA, UA') \\
 \searrow \mathcal{A}(\varepsilon_A, 1_{A'}) & & \swarrow \omega_{A', UA} \\
 & & \mathcal{A}(LUA, A')
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \alpha \dashv & \longrightarrow & U(\alpha) \\
 \downarrow \alpha \varepsilon_A & & \downarrow \omega_{A', UA}(U(\alpha))
 \end{array}$$

С помощью формулы (5) получаем $\omega_{A', UA}(U(\alpha)) = \varepsilon_{A'} L(U(\alpha))$. В силу естественности ε коммутативен квадрат

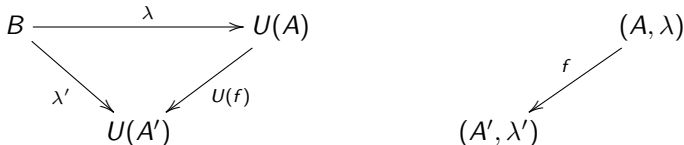
$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\
 \varepsilon_A \uparrow & & \uparrow \varepsilon_{A'} \\
 LUA & \xrightarrow{LU\alpha} & LUA'
 \end{array}$$

Отсюда вытекает коммутативность диаграммы (6). Поскольку $\omega_{A', UA}$ биекции, то $U_{A,A'}$ биективны $\Leftrightarrow \mathcal{A}(\varepsilon, 1_{A'})$ биективны $\Leftrightarrow \varepsilon_A$ – изоморфизмы.⁴

⁴Подкатегория называется рефлексивной, если функтор вложения полон и обладает левым сопряженным

Слайс категория и конинициальное семейство

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – функтор. Для каждого $B \in \mathcal{B}$ комма-категорией (или слайс-категорией) называется категория, объектами которой являются пары $(A, \lambda : B \rightarrow UA)$, а морфизмы между (A, λ) и (A', λ') задаются морфизмами $f : A \rightarrow A'$ в \mathcal{A} делающие коммутативными треугольник



Универсальная стрелка $B \rightarrow UA$ существует, если и только если комма-категория B/U обладает инициальным объектом.

Определение

Категория \mathcal{C} называется обладающей разрешающим (или конинициальным) семейством, если существует множество I и семейство объектов $K_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$ такое, что для каждого объекта $C \in \mathcal{C}$ найдутся $i \in I$ и морфизм $K_i \rightarrow C$.

Критерий существования инициального объекта

Одна из задач, приводящая к нахождению инициального объекта - проблема семантики⁵ определения по индукции (рекурсии). Пусть $F : Set \rightarrow Set$ - функтор. F -алгеброй называется пара (A, α) состоящая из множества A и отображения $\alpha : F(A) \rightarrow A$. Морфизм F -алгебр называется гомоморфизмом.

Определение

Инициальный объект μF категории F -алгебр называется инициальной алгеброй. Рекурсия определяется как единственный гомоморфизм $\mu F \rightarrow (A, \alpha)$.^a

^aJ. Adámek, S. Milius, S. Lawrence. On well-founded and recursive coalgebras. Cham: Springer. Lect. Notes Comput. Sci. 12077, 17-36 (2020).

Например, для функтора $F(X) = X + 1 = X \cup \{X\}$ существует инициальная F -алгебра неотрицательных целых \mathbb{N} в которой $\mathbb{N} + 1 \rightarrow \mathbb{N}$ определено как $n \mapsto n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \mapsto 0$. Для каждой F -алгебры (A, α) , с $\alpha(\mathbb{N}) = a$, гомоморфизм $f(0) = a$ и $f(n+1) = \alpha(f(n))$ будет рекурсией.

⁵Под семантикой мы понимаем построение множества с отношениями

Критерий существования инициального объекта

Заметим, что во всякой полной категории существует финальный объект. Он изоморфен пределу диаграммы, определенной на пустой категории.

Лемма

Пусть \mathcal{C} – полная (и локально малая) категория обладающая разрешающим семейством объектов. Тогда \mathcal{C} имеет инициальный объект.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.⁶ Пусть $\{K_i\}_{i \in I}$ – разрешающее семейство в \mathcal{C} . Тогда произведение $W = \prod_{i \in I} K_i \in \mathcal{D}$ имеет морфизмы $W \rightarrow C$ для всех $C \in \mathcal{C}$, заданные как композиции $W = \prod K_i \xrightarrow{P_i} K_i \rightarrow C$. W – “слабо инициальный объект”.

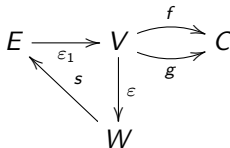
Теперь забудем о семействе $\{K_i\}_{i \in I}$. Достаточно существования объекта W допускающего морфизм в каждый объект категории \mathcal{C} .

⁶С. Маклейн. Категории для работающего математика. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

Критерий существования инициального объекта

Продолжение доказательства леммы. Пусть $\varepsilon : V \rightarrow W$ - уравниватель множества всех эндоморфизмов объекта W . Для каждого $C \in \mathcal{C}$ существует стрелка $W \rightarrow C$ и стрелка $V \rightarrow C$ равная композиции $V \xrightarrow{\varepsilon} W \rightarrow C$.

Мы видим, что V - кандидат на должность инициального объекта. Пусть заданы две стрелки $f, g : V \rightarrow C$, возьмем их уравниватель ε_1 , как это показано на следующей диаграмме.



Тогда $\delta\varepsilon = \varepsilon$ для всех $\delta : W \rightarrow W$. Значит $\varepsilon\varepsilon_1s\varepsilon = \varepsilon$. Но ε является уравнивателем и, значит, мономорфизмом; сокращение на ε слева приводит к равенству $\varepsilon_1s\varepsilon = 1_V$. Таким образом, ε_1 является ретракцией. Аналогично ε_1 является мономорфизмом, как уравниватель. Следовательно ε_1 есть изоморфизм и $f = g$. Мы доказали, что V - инициальный объект в \mathcal{C} .

Критерий представимости

Мы рассмотрели одно из достаточных условий представимости функтора “Если $U : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ имеет сопряженный слева, то он представим” (Предложение на стр. 28). Интерес к этой теме связан с теоремой Брауна⁷ о представимости. См. также книгу⁸. Доказанная лемма позволяет получить необходимые и достаточные условия. Пусть $U : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ - функтор. Для функтора $H^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ пара $(1, \tilde{1}_{\mathcal{C}} : 1 \rightarrow H^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}))$ будет универсальной стрелкой. Здесь $\tilde{x}(0) = x$.

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\tilde{1}_{\mathcal{C}}} & H^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \\
 & \searrow \tilde{\gamma} & \swarrow \\
 & & H^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')
 \end{array}$$

Он будет изоморфен $H^{\mathcal{C}}$ для некоторого $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, если и только если категория $1/U$ имеет инициальный объект. Если $1/U$ полна, то к ней можно применить критерий существования инициального объекта.

⁷Brown, E. H. (1962). Cohomology theories. Annals of Mathematics, Vol. 75, No. 3, 467-484.

⁸Э. Спеньер. Алгебраическая топология. - М. Мир, 1971 . Глава 7, §7

Критерий представимости

Лемма

Пусть \mathcal{C} - (мало) полная категория и пусть задан непрерывный функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$. Тогда категория $1/F$ полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Рассмотрим диаграмму $D : J \rightarrow 1/F$ и докажем, что она имеет предел в категории $1/F$. С этой целью будем рассматривать категорию $1/F$ как состоящую из пар $(c \in \mathcal{C}, x \in F(c))$, морфизмами между такими парами $(c, x) \rightarrow (c', x')$ служат морфизмы $\alpha : c \rightarrow c'$, такие, что $F(\alpha)(x) = x'$.

Обозначим значения диаграммы D на j через $(c_j, x_j \in F(c_j))$. Категория \mathcal{C} полна, и функтор F перестановочен с пределами. Значит существует предел $c = \varprojlim_{j \in J} c_j \in \mathcal{C}$ и $F(\varprojlim_{j \in J} c_j) = \varprojlim_{j \in J} F(c_j)$, откуда существует $x \in F(\varprojlim_{j \in J} c_j)$, который проекции предела отображают в $x_j \in F(c_j)$. Пара $(c, x \in F(c))$ будет пределом диаграммы D . Следовательно, категория $1/F$ полна.

Критерий представимости

Согласно критерию существования инициального объекта, $1/F$ имеет инициальный объект (и значит) представим, если и только если \exists (множество) $I \subseteq \text{Ob } \mathcal{C}$ & \exists семейство пар $(C_i, 1 \xrightarrow{x_i} F(C_i))_{i \in I}$ такое, что $\forall (C \in \text{Ob } \mathcal{C}, 1 \xrightarrow{x} F(C))$ найдутся $i \in I$ и $t : C_i \rightarrow C$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{x_i} & F(C_i) \\
 & \searrow x & \swarrow F(t) \\
 & & F(C)
 \end{array}$$

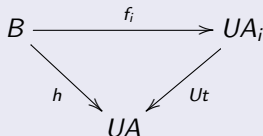
Следствие

Функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ представим тогда и только тогда, когда он непрерывен и выполнено следующее условие: \exists множество I , семейство $C_i \in \mathcal{C}$ и семейство $x_i \in F(C_i)$ такое, что для всякой пары $(C \in \mathcal{C}, x \in F(C))$ существует $i \in I$ и морфизм $f : C_i \rightarrow C$, удовлетворяющие равенству $F(f)(x_i) = x$.

Теорема Фрейда

Теорема

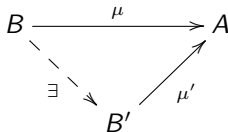
Пусть \mathcal{A} мало полная категория и $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – функтор. Функтор U будет имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда он сохраняет малые пределы и выполнено следующее условие: $\forall B \in \mathcal{B} \exists$ (множество) I и семейство $(f_i : B \rightarrow UA_i)_{i \in I}$, такие что $\forall h : B \rightarrow UA \exists i \in I \exists t : A_i \rightarrow A$ делающие коммутативной диаграмму



Условие равносильно тому, что для каждого $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$ категория B/U имеет конинициальное множество. Остается доказать, что B/U – полная и локально малая для каждого $B \in \mathcal{B}$. Она локально мала, ибо \mathcal{A} локально мала. Доказательство полноты можно свести к доказательству существования произведений и уравнителей в B/U .

Подобъекты

Пусть A – объект категории \mathcal{A} . Мономорфизмы $\mu : B \rightarrow A$ и $\mu' : B' \rightarrow A$ составляют предупорядоченное множество, с отношением предпорядка $\mu \rightarrow \mu'$, если существует коммутативный треугольник



Если $\mu \xrightarrow{\exists} \mu'$ и $\mu' \xrightarrow{\exists} \mu$, то они называются эквивалентными. Подобъектами объекта A называются классы эквивалентности мономорфизмов $B \rightarrow A$.

Порождающие семейства

Объект I категории \mathcal{A} называется порождающим, или интегральным⁹, если для любой пары не равных морфизмов $f, g : A \rightrightarrows A'$ существует морфизм $h : I \rightarrow A$ такой, что $fh \neq gh$. Например, 1 порождает Set , \mathbb{Z} порождает категорию групп.

Предложение

Если категория \mathcal{A} имеет порождающий объект, то она изоморфна некоторой подкатегории категории множеств.

Вложение строится с помощью функтора $h' = \mathcal{A}(I, -) : \mathcal{A} \rightarrow Set$.

Множество $\mathcal{S} \subseteq Ob \mathcal{A}$ называется порождающим категорию \mathcal{A} , если для каждой пары морфизмов $f, g : A \rightrightarrows A'$ существует объект $S \in \mathcal{S}$ и морфизм $h : S \rightarrow A$ такой, что $fh \neq gh$.

Двойственно, $\mathcal{Q} \subseteq Ob \mathcal{A}$ называется копорождающим, если для каждой пары морфизмов $f, g : A \rightrightarrows A'$ существует объект $Q \in \mathcal{Q}$ и морфизм $h : A' \rightarrow Q$ такой, что $hf \neq hg$.

⁹И. Букур, А. Деляну. Введение в теорию категорий и функторов. - М.: Мир, 1972. С. 38

Специальная теорема о сопряженном функторе

Сначала о признаке существования инициального объекта.

Теорема

Пусть категория \mathcal{A} полна в малом, локально мала и имеет малое копорождающее множество \mathcal{Q} и пусть для каждого множества подобъектов любого объекта $A \in \mathcal{A}$ существует пересечение. Тогда \mathcal{A} имеет инициальный объект.

Приведем классический вариант специальной теоремы о сопряженном функторе (SAFT). Функтор называется непрерывным, если он сохраняет все малые пределы.

Теорема

Пусть категория \mathcal{A} полна в малом, имеет малые множества подобъектов, локальна мала и имеет малое копорождающее множество, а категория \mathcal{B} локально мала. Тогда функтор $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ имеет левый сопряженный, если и только если он непрерывен.

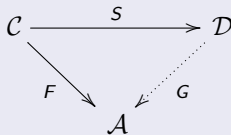
Специальная теорема о сопряженном функторе

Пример

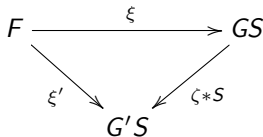
Рассмотрим функтор вложения $U : \text{CompHaus} \subset \text{Top}$. Категория CompHaus имеет пределы (вытекает из теоремы Тихонова о компактности произведения компактных пространств). Пределы пространств из CompHaus лежат в CompHaus , значит функтор вложения непрерывен. Обе категории локально малы. Копорождающий объект равен I , по лемме Урысона. Следовательно, существует левый сопряженный к U .

Задача построения расширений функтора

Пусть $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – функтор между малыми категориями. Рассмотрим функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Требуется расширить его на \mathcal{D} . Попытки расширения



приводят к категории пар (G, ξ) , состоящих из функторов $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ и морфизмов $\xi : F \rightarrow GS$. Морфизмы $(G, \xi) \xrightarrow{\zeta} (G', \xi')$ задаются морфизмами $\zeta : G \rightarrow G'$ для которых коммутативны диаграммы



Здесь $\zeta * S$ определено по правилу Годамана: $(\zeta * S)_j = \zeta_{S(j)}$.

Определение расширения Кана

Пусть $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – функтор между малыми категориями, и \mathcal{A} – произвольная категория. Рассмотрим функтор $S^* = (-) \circ S : \mathcal{A}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, $F \mapsto F \circ S$, $\eta \mapsto \eta \star S$. Левый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *левым расширением Кана* и обозначается $\text{Lan}^S : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$. Правый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *правым расширением Кана*.

Пример

Пусть $i : H \subseteq G$ – вложение подгруппы в группу. Для любого H -модуля $M \in \text{Ab}^H$ индуцированный модуль^a

$$\text{Ind}_H^G M = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

будет изоморфен $\text{Lan}^i M$, а коиндуцированный модуль

$$\text{Coind}_H^G M = \text{Ab}^H(\mathbb{Z}[G], M)$$

изоморфен $\text{Ran}_i M$.

^aК. С. Браун, Когомологии групп. - М.: Наука, 1987

Расширения Кана

Согласно определению сопряженных функторов, функторы

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}^C & \xrightarrow{\text{Lan}^S} & \mathcal{A}^D \\
 & \xleftarrow{(-) \circ S} &
 \end{array}$$

связаны естественной биекцией

$$\mathcal{A}^D(\text{Lan}^S F, G) \cong \mathcal{A}^C(F, G \circ S) .$$

В этом случае пара $(\text{Lan}^S F, \eta_F)$ будет универсальной стрелкой:

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\eta_F} & (\text{Lan}^S F) \circ S \\
 \searrow \forall \varphi & & \swarrow \varphi * S \\
 & & G \circ S
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & \text{Lan}^S F \\
 & \swarrow \exists! \bar{\varphi} & \\
 & & G
 \end{array}$$

Формулы для вычисления расширений Кана

Пусть $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ – объект. Напомним, что S/d обозначает *комма-категорию*. Объектами этой категории являются пары, состоящие из объекта $c \in \mathcal{C}$ и морфизма $\alpha : S(c) \rightarrow d$, а морфизмы $(c, \alpha) \rightarrow (c', \alpha')$ задаются морфизмами $\beta : c \rightarrow c'$, удовлетворяющими соотношению $\alpha' \circ \beta = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc}
 (c, \alpha) & & S(c) \\
 \downarrow \beta & := & \downarrow S(\beta) \\
 (c', \alpha') & & S(c')
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & d \\
 & \nearrow \alpha & \\
 & & \\
 & \searrow \alpha' & \\
 & &
 \end{array}$$

Обозначим через $Q_d : S/d \rightarrow \mathcal{C}$ забывающий функтор.

Формулы для вычисления расширений Кана

Теорема

Пусть \mathcal{A} – категория с копределами. Левое расширение Кана функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ вдоль $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ можно определить как функтор, принимающий значения

$$\text{Lan}^S F(d) = \varinjlim (S/d \xrightarrow{Q_d} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано естественное преобразование $\varphi : F \rightarrow G \circ S$. Построим естественные по d морфизмы $\varinjlim^{S/d} FQ_d \rightarrow G(d)$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 S/d \xrightarrow{Q_d} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & G \circ S
 \end{array}$$

Для всех $(c, \alpha) \in S/d$ морфизмы $G(\alpha) : G(S(c)) \rightarrow G(d)$ дают коммутативные диаграммы

Формулы для вычисления расширений Кана

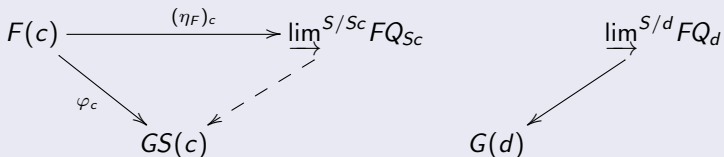
$$\begin{array}{ccc}
 GSQ_d(c_1, \alpha_1) & & \\
 \downarrow GSQ_d(\beta) & \searrow G(\alpha_1) & \\
 & & G(d) \\
 & \nearrow G(\alpha_2) & \\
 GSQ_d(c_2, \alpha_2) & &
 \end{array}$$

которые составляют естественное преобразование $GSQ_d \rightarrow \Delta_{S/d}G(d)$.
 Композиция $FQ_d \rightarrow GSQ_d \rightarrow \Delta_{S/d}G(d)$ после перехода к прямому пределу
 приводит к искомым морфизмам $\bar{\varphi}_d : \varinjlim^{S/d} FQ_d \rightarrow G(d)$. Можно проверить
 непосредственно, что отображение, сопоставляющее каждому естественному
 преобразованию $\varphi : F \rightarrow G \circ S$ естественное преобразование $\bar{\varphi}_d$ будет
 биекцией.

Мы избежим этого, указав универсальную стрелку.

Формулы для вычисления расширений Кана

Пусть $\nu_{(c_1, \alpha_1 : S_{c_1} \rightarrow S_c)} : F(c_1) \rightarrow \varinjlim^{S/S_c} FQ_{S_c}$ – канонические морфизмы копредела. Положим $(\eta_F)_c : F(c) \rightarrow \varinjlim^{S/S_c} FQ_{S_c}$ равным $\nu_{(c, 1_{S_c} : S_c \rightarrow S_c)}$. Легко видеть, что коммутативна диаграмма:



Следовательно, η_F – универсальная стрелка, а функтор $\{\varinjlim^{S/d} FQ_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ сопряженным слева к $(-) \circ S$.

Следствие

Пусть $\mathbb{1}$ категория с $Ob \mathbb{1} = \{0\}$, $Mor \mathbb{1} = \{1_0\}$. Тогда для любых функторов $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{1}$ и $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ в кополную категорию \mathcal{A} , верно $Lan^S F(0) = \varinjlim^{\mathcal{C}} F$.

Метод построения сопряженных функторов

Пусть \mathcal{C} – кополная категория. Тогда с каждой малой категорией \mathbb{D} и функтором $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{C}$ связан функтор

$$D : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{D}^{op}},$$

принимаящий на объектах $C \in \mathcal{C}$ значения $D(C) = \mathcal{C}(H(-), C)$. Морфизму $f : C \rightarrow C'$ сопоставляется естественное преобразование, имеющее компоненты

$$\mathcal{C}(H(d), C) \xrightarrow{\mathcal{C}(H(d), f)} \mathcal{C}(H(d), C'),$$

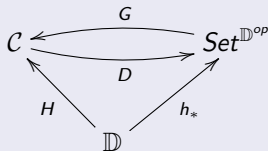
сопоставляющие каждому морфизму $H(d) \xrightarrow{g} C$ композицию $f \circ g$ морфизмов

$$H(d) \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} C'$$

Метод построения сопряженных функторов

Теорема

Пусть \mathcal{C} – кополная, а \mathbb{D} – малая категории. Пусть функтор $D : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{D}^{op}}$ определен как $D(C) = h_C \circ H^{op}$ для всех $C \in \mathcal{C}$. Тогда для любого функтора $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{C}$ функтор D имеет левый сопряженный, изоморфный левому расширению Кана $G = \text{Lan}^{h_*} H$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что существует естественная по $X \in \text{Set}^{\mathbb{D}^{op}}$ биекция

$$\text{Set}^{\mathbb{D}^{op}}(X, h_C \circ H^{op}) \xrightarrow{\omega} \mathcal{C}((\text{Lan}^{h_*} H)(X), C).$$

Метод построения сопряженных функторов

Рассмотрим произвольное естественное преобразование $\eta : X \rightarrow h_C \circ H^{op}$ и построим для него $\omega(\eta)$. В силу естественности η имеют место коммутативные для всех $\alpha : d \rightarrow d'$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 X(d) & \xrightarrow{\eta_d} & C(H(d), C) \\
 \uparrow X(\alpha) & & \uparrow C(H(\alpha), 1_C) \\
 X(d') & \xrightarrow{\eta_{d'}} & C(H(d'), C)
 \end{array}$$

в которых компоненты η_d естественного преобразования сопоставляют элементам $x \in X(d)$ отображения

$$\eta_d(x) : H(d) \rightarrow C.$$

Метод построения сопряженных функторов

По формуле для вычисления левого расширения Кана множество $\mathcal{C}((Lan^{h_*} H)(X), C)$ будет равно

$$\mathcal{C}(\varinjlim^{h_*/X} HQ_X, C) \cong \varprojlim_{\tilde{x} \in h_*/X} \mathcal{C}(H(d), C).$$

Стало быть, его элементы можно рассматривать как нити $(\xi_{\tilde{x}})_{\tilde{x} \in h_*/X}$ — семейства морфизмов, делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & H(d) & \\
 & \uparrow & \searrow \xi_{\tilde{x}} \\
 H(\alpha) & & C \\
 & \uparrow & \nearrow \xi_{\tilde{x}'} \\
 & H(d') &
 \end{array}$$

для любых морфизмов $\tilde{x} \xrightarrow{\alpha} \tilde{x}'$ категории h_*/X .

Метод построения сопряженных функторов

Естественному преобразованию $\eta : X \rightarrow h_C \circ H^{op}$ можно сопоставить семейство морфизмов $\xi_{\tilde{x}} = \eta_d(x) \in \mathcal{C}(H(d), C)$, где \tilde{x} пробегает все объекты категории h_*/X . Для того, чтобы установить, что эти семейства будут нитями, проверим равенства $\xi_{\tilde{x}} \circ H(\alpha) = \xi_{\tilde{x}'}$:

$$\xi_{\tilde{x}'} = \eta_{d'}(x') \in \mathcal{C}(H(d'), C) \Rightarrow \xi_{\tilde{x}'} \circ H(\alpha) = \eta_{d'}(x') \circ H(\alpha) = \eta_d(X(\alpha)(x')).$$

Поэтому, в случае $x = X(\alpha)(x')$, будет иметь место равенство $\eta_d(x) = \xi_{\tilde{x}'} \circ H(\alpha)$, из которого следует $\xi_{\tilde{x}} = \xi_{\tilde{x}'} \circ H(\alpha)$. Легко видеть, что полученное отображение $\eta \mapsto (\xi_{\tilde{x}})$, $\xi_{\tilde{x}} = \eta_d(x)$, взаимно однозначно, и обратным для него будет отображение, сопоставляющее нити $(\xi_{\tilde{x}})$ естественное преобразование $\eta_d(x) = \xi_{\tilde{x}}$. Следовательно, ω будет естественной биекцией.

Все универсальные конструкции можно строить с помощью расширений Кана

Теорема

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ - функтор, имеющий левый сопряженный $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.
 Тогда $L \cong \text{Ran}_{U1_{\mathcal{A}}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем формулу поточечного вычисления значений правого расширения Кана на объекте $B \in \mathcal{B}$

$$\text{Ran}_{U1_{\mathcal{A}}}(B) = \varprojlim(B/U \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A} \xrightarrow{1_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}) = \varprojlim(B/U \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A}).$$

Объектами категории B/U служат пары (A, α) , где $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ и $\alpha : B \rightarrow UA$ - морфизм категории \mathcal{B} . Морфизмы между парами $(A, \alpha) \xrightarrow{\gamma} (A', \alpha')$ задаются морфизмами $\gamma : A \rightarrow A'$ такими, что $U\gamma \circ \alpha = \alpha'$. Поскольку существует $L \dashv U$, то пара $(LB, \eta_B : B \rightarrow U(LB))$ будет инициальным объектом (и универсальной стрелкой) категории B/U , откуда

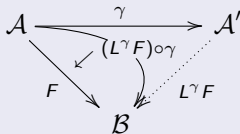
$$\varprojlim(B/U \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A}) = Q_B(LB, \eta_B) = LB. \text{ Следовательно, } \text{Ran}_{U1_{\mathcal{A}}} \cong L.$$

Производные функторы

Теория производных функторов применяется в гомологической и гомотопической алгебре¹⁰.

Определение

Пусть заданы функторы



Левым производным от F относительно γ называется функтор $L^\gamma F : A' \rightarrow B$ с естественным преобразованием $\varepsilon : L^\gamma F \circ \gamma \rightarrow F$, такой, что

$$(\forall G : A' \rightarrow B)(\forall \zeta : G \circ \gamma \rightarrow F)(\exists ! \theta : G \rightarrow L^\gamma F) \varepsilon \cdot \theta * \gamma = \zeta.$$

¹⁰Quillen, Daniel G. Homotopical algebra. Lecture Notes in Math, Vol. 43. Springer, 2006, ch I, p 4.1

Производные функторы

Последняя строка определения иллюстрируется диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xleftarrow{\varepsilon} & (L\gamma F) \circ \gamma \\
 \swarrow \forall \zeta & & \nearrow \theta * \gamma \\
 & G \circ \gamma & \\
 & & \\
 & & \begin{array}{ccc}
 & & L\gamma F \\
 & \nearrow \exists! \theta & \\
 & G &
 \end{array}
 \end{array}$$

Терминология производных функторов была введена Вердьё¹¹ в 1967. Он рассматривал случай $\mathcal{A} = K(\mathcal{A})$ - категория комплексов абелевой категории по модулю гомотопии, $\mathcal{A}' = D(\mathcal{A})$ - ее категория частных относительно квазиизоморфизмов. Двойственно определяются правые производные.

Предложение

Левый производный от F относительно γ равен правому расширению Кана функтора F вдоль функтора γ . А правый производный - левому расширению Кана.

¹¹Verdier, Jean-Louis. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. Société mathématique de France, 1996.

Производные функторы

Напомним определение локализующей категории (категории частных, гомотопической категории).

Рассмотрим произвольную категорию \mathcal{C} и класс морфизмов $W \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$. Существует функтор определенный на \mathcal{C} и являющийся универсальным по отношению к функторам, переводящим морфизмы из W в изоморфизмы¹²

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C}[W^{-1}] \\
 \searrow & & \swarrow \\
 \mathcal{D} & & \mathcal{D}
 \end{array}$$

$\forall f: f(W) \subseteq \text{Iso } \mathcal{D}$
 $\exists! g$

и называющийся локализующим. В книге¹³ рассмотрен случай модельной категории Квиллена \mathcal{C} с классом слабых эквивалентностей W .

Гомотопической категорией $Ho(\mathcal{C})$ называется категория $\mathcal{C}[W^{-1}]$.

¹²Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры. - М. Наука, 1988, гл. III, §2.2, с.173

¹³Quillen, Daniel G. Homotopical algebra. Lecture Notes in Math, Vol. 43. Springer, 2006, ch I, p 4.2

Производные функторы

Проблемы исследования категорий с выделенными классами слабых гомотопических эквивалентностей помогает решать с помощью следующего определения¹⁴:

Определение

Пусть $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ - функтор между модельными категориями. Его тотальный левый производный функтор $LF : \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}'$ определяется с помощью формулы $LF = L\gamma'(\gamma' \circ F)$, где $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$ и $\gamma' : \mathcal{C}' \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}'$ - локализующие функторы.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' \\
 \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow{LF} & \text{Ho } \mathcal{C}'
 \end{array}$$

¹⁴Quillen, Daniel G. Homotopical algebra. Lecture Notes in Math, Vol. 43. Springer, 2006, ch I, p 4.3, Def. 2