КАТЕГОРИИ С СОКРАЩЕНИЯМИ РАЗМЕРНОСТИ ОДИН ЧАСТИЧНО СВОБОДНЫ *

А. А. Хусаинов

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

Барри Митчелом [1] была выдвинута гипотеза о том, что моноиды с сокращениями когомологической размерности 1 частично свободны. Эта гипотеза опровергнута Б.В.Новиковым [2]. В данной работе будет установлено, что предположение Б.Митчела становится верным, если в нем когомологическую размерность заменить размерностью Хохшильда-Митчела. В действительности будет доказано более общее утверждение.

Б.Митчелом [3] установлено, что если категория свободна, то ее размерность Хохшильда-Митчела не больше 1. Высказанная им догадка о том, что обратная импликация верна для категорий дельта, подтверждена Ч.Ч.Ченгом [4].

Малая категория, каждый морфизм которой является эпиморфизмом и мономорфизмом, называется категорией с сокращениями. Автором установлено [5], что для категории с сокращениями размерность Хохшильда-Митчела равна когомологической размерности категории факторизаций. Категория частных свободной категории, полученная обращением элементов подмножества множества морфизмов длины 1, называется частично свободной. Известно [6], что размерность категории частных малой категории размерности 1 не больше 1. В настоящей работе будет доказано, что категории с сокращениями размерности Хохшильда-Митчела 1 частично свободны. Тем самым частично подтверждена гипотеза Б.Митчела [7] о том, что всякая малая категория размерности Хохшильда-Митчела 1, не имеющая идемпотентных морфизмов кроме тождественных, изоморфна категории частных свободной категории.

§1. Предварительные сведения

Для произвольной категории $\mathbf{A}$ обозначим через $\mathbf{A}^{op}$ дуальную категорию, $Mor\mathbf{A}$ - класс всех морфизмов, $Ob\mathbf{A}$ - класс всех объектов категории $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{A}(-,=) : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to Ens$ - функтор из декартового произведения категорий $\mathbf{A}^{op}$ и $\mathbf{A}$ в категорию множеств и отображений Ens, сопоставляющий каждой паре (A, B) объектов из $\mathbf{A}$ множество $\mathbf{A}(A, B)$ всех морфизмов $A \to B$, а каждой паре морфизмов $(f : A' \to A, g : B \to B')$ категории $\mathbf{A}$ - действующее на элементах $\alpha \in \mathbf{A}(A, B)$ по формуле $\mathbf{A}(f, g)(\alpha) = g \circ \alpha \circ f$ отображение $\mathbf{A}(f, g) : \mathbf{A}(A, B) \to \mathbf{A}(A', B')$. Если $\mathbf{A}$ - абелева категория, то множества $\mathbf{A}(A, B)$ будут абелевыми группами, а отображения $\mathbf{A}(f, g)$ - гомоморфизмами ; в этом случае функтор $\mathbf{A}(-,=)$ будем рассматривать как принимающий значения в категории абелевых групп и гомоморфизмов Ab.

Ниже везде верхние грани подмножеств множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ будут рассматриваться в $\hat{\mathbf{N}} = \{-1\} \cup \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Для произвольной малой категории $\mathbf{C}$ категория $\mathbf{C}Ab$ функторов $\mathbf{C} \to Ab$ абелева, допускает точные произведения и точные направленные копределы, обладает достаточным числом проективных и инъективных объектов. Обозначим через $\lim^n_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}Ab \to Ab$ правые n-е производные функторы функтора предела, при $n \in \mathbf{N}$.

Пусть $\mathbf{C}$ - малая категория. Ее *когомологической размерностью* c.d.$\mathbf{C}$ называется верхняя грань чисел $n \in \mathbf{N}$, для которых функторы $\lim^n_{\mathbf{C}}$ не равны нулю. Пусть $S : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ - функтор из малой категории в произвольную. Слоем S/d функтора S над объектом $d \in \mathbf{D}$ называется

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантового центра по исследованиям в области математики при Новосибирском государственном университете

категория, объектами которой служат пары (a, α) объектов $a \in \mathbf{C}$ и морфизмов $\alpha : Sa \to d$ категории $\mathbf{D}$, а морфизмами $(a, \alpha) \to (b, \beta)$ - тройки (f, α, β) морфизмов $f \in \mathbf{C}(a, b), \alpha \in \mathbf{D}(Sa, d), \beta \in \mathbf{D}(Sb, d)$ таких, что $\beta \circ Sf = \alpha$. Двойственно, кослоем d/S объекта $d \in \mathbf{D}$ над функтором $S : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется категория, объекты которой суть пары (a, α) объектов $a \in \mathbf{C}$ и морфизмов $\alpha \in \mathbf{D}(d, Sa)$, а морфизмами между такими парами $(a, \alpha) \to (b, \beta)$ служат тройки $(f \in \mathbf{C}(a, b), \alpha \in \mathbf{D}(d, Sa), \beta \in \mathbf{D}(d, Sb))$, удовлетворяющие соотношениям $Sf \circ \alpha = \beta$. Функтор $Q_d : d/S \to \mathbf{C}$ (соответственно $Q_d : S/d \to \mathbf{C}$) , действующий как $(a, \alpha) \mapsto a$ на объектах и $(f, \alpha, \beta) \mapsto f$ - на морфизмах, называется забывающим функтором кослоя (соответственно слоя). Если $\mathbf{C}$ - подкатегория категории $\mathbf{D}$, возможно, равная ей, то слои вложения $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{D}$ при $d \in \mathbf{D}$ будут обозначаться через $\mathbf{C}/d$, а кослои - $d/\mathbf{C}$.

Пусть $S : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ - функтор между малыми категориями. Рассмотрим функтор $(-) \circ S : \mathbf{D}Ab \to \mathbf{C}Ab$, действующий как $F \mapsto F \circ S$ на объектах и $(\eta : F \to G) \mapsto (\eta * S)$ - на морфизмах категории $\mathbf{D}Ab$. Здесь $\eta * S$ - естественное преобразование, имеющее компоненты $(\eta * S)_a = \eta_{Sa}$ для всех объектов $a \in \mathbf{C}$. Функтор $(-) \circ S$ обладает правым и левым сопряженными функторами, обозначаемыми через Ran_S и Lan^S соответственно. Значение Ran_S на $F \in \mathbf{C}Ab$ называется правым расширением Кана функтора F вдоль функтора S. Пусть Ran_S^n - правые n-е производные функтора Ran_S при $n \in \mathbf{N}$. Известно [8, приложение 2, п.3.8], что для любых объекта $F \in \mathbf{C}Ab$ и натурального числа $n \in \mathbf{N}$ для всех $d \in \mathbf{D}$ имеют место изоморфизмы $\mathrm{Ran}_S^n F(d) \cong \lim^n_{d/S} F \circ Q_d$.

Лемма 1.1. *Пусть* $\mathbf{C}$ *- малая категория,* $c \in \mathbf{C}$ *- ее объект. Тогда* $\mathrm{c.d.}(\mathbf{C}/c) \leq \mathrm{c.d.}\mathbf{C}$.

Доказательство. Согласно [9, предложение 2.3] для любых функтора $F : \mathbf{C}/c \to Ab$ и числа $n \in \mathbf{N}$ имеет место изоморфизм $\lim^n_{\mathbf{C}/c} F \cong \lim^n_{\mathbf{C}} \mathrm{Ran}_{Q_c} F$. Следовательно, $\mathrm{c.d.}(\mathbf{C}/c) \leq \mathrm{c.d.}\mathbf{C}$, что и требовалось доказать.

Функтор $S : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *строго коинициальным* , если для каждого объекта $d \in \mathbf{D}$ целочисленные группы гомологий нерва категории S/d изоморфны группам гомологий точки. Согласно [10, теорема 2.3] , в этом случае для любых функторов $F : \mathbf{D} \to Ab$ будут иметь место при всех $n \in \mathbf{N}$ изоморфизмы $\lim^n_{\mathbf{D}} F \cong \lim^n_{\mathbf{C}} F \circ S$, а вместе с ними - неравенство $\mathrm{c.d.}\mathbf{C} \geq \mathrm{c.d.}\mathbf{D}$.

В частности, если функтор $S : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ - эквивалентность категорий, то S обладает правым сопряженным. Значит, в этом случае категория S/d для каждого $d \in \mathbf{D}$ обладает терминальным объектом, а ее нерв будет стягиваемым, откуда $\mathrm{c.d.}\mathbf{C} \geq \mathrm{c.d.}\mathbf{D}$. Симметричность определения эквивалентности категорий приводит к равенству $\mathrm{c.d.}\mathbf{C} = \mathrm{c.d.}\mathbf{D}$.

Пусть $\mathbf{C}$ - малая категория. Обозначим через $\mathbf{C}$ ее категорию факторизаций [11]; объектами категории $\mathbf{C}'$ служат все морфизмы категории $\mathbf{C}$, причем для каждой пары объектов α, β из $\mathbf{C}'$ множество $\mathbf{C}'(\alpha, \beta)$ морфизмов $\alpha \to \beta$ состоит из пар (x, y) морфизмов из $\mathbf{C}$, удовлетворяющих соотношению $y \circ \alpha \circ x = \beta$. Композиция таких пар определяется покомпонентно. Когомологическая размерность $\mathrm{c.d.}\mathbf{C}'$ категории факторизаций называется *размерностью Бауэса-Виршинга* категории $\mathbf{C}$ и обозначается $\mathrm{Dim}\,\mathbf{C}$.

Пусть $\mathbf{C}$ - малая категория, α - ее морфизм. Разложением морфизма α будем называть произвольную пару (f, g) морфизмов категории $\mathbf{C}$, удовлетворяющую соотношению $g \circ f = \alpha$. Обозначим через $\mathbf{C}(\alpha)$ категорию, объектами которой служат все разложения морфизма α , а множество морфизмов $(f_1, g_1) \to (f_2, g_2)$ между произвольными разложениями состоит из морфизмов h таких, что $h \circ f_1 = f_2$ и $g_2 \circ h = g_1$.

Лемма 1.2. *Для произвольных малой категории* $\mathbf{C}$ *и морфизма* $\alpha \in Mor\mathbf{C}$ *справедливо неравенство* $\mathrm{Dim}\,\mathbf{C}(\alpha) \leq \mathrm{Dim}\,\mathbf{C}$.

Доказательство. Легко видеть, что категория факторизаций $\mathbf{C}(\alpha)'$ категории разложений изоморфна категории $\mathbf{C}'/\alpha$. По лемме 1.1 верно $\mathrm{c.d.}\mathbf{C}'/\alpha \leq \mathrm{c.d.}\mathbf{C}'$. Следовательно, $\mathrm{c.d.}\mathbf{C}(\alpha)' \leq \mathrm{c.d.}\mathbf{C}'$, что и требовалось доказать.

Следующее вспомогательное утверждение по сути дела содержится в [3, следствие 36.11]:

Лемма 1.3. *Пусть* $\mathbf{C}$ *- частично упорядоченное множество, обладающее наибольшим и наименьшим элементами. Тогда, если* $\dim \mathbf{C} \leq 1$ *, то категория* $\mathbf{C}$ *изоморфна конечному линейно упорядоченному множеству.*

В самом деле, если $\mathbf{C}$ содержит хотя бы два несравнимых элемента, то она содержит декартовое произведение $\{0,1\} \times \{0,1\}$ линейно упорядоченного множества $\{0,1\}$ на себя и, значит, содержит это декартовое произведение в качестве ретракта ; в этом случае

$$\dim \mathbf{C} \geq \dim \{0,1\} \times \{0,1\} = 2.$$

Следовательно, при $\dim \mathbf{C} \leq 1$ множество $\mathbf{C}$ будет линейно упорядоченным. Если $\mathbf{C}$ - бесконечное , то оно содержит либо $\hat{\mathbf{N}}$, либо $\hat{\mathbf{N}}^{op}$. Так как $\hat{\mathbf{N}}$ - полная решетка, то $\mathbf{C}$ будет содержать одно из этих подмножеств в качестве ретракта ; в этом случае $\dim \mathbf{C} \geq \dim \hat{\mathbf{N}} = 2$. Это противоречит условию $\dim \mathbf{C} \leq 1$, поэтому $\mathbf{C}$ - конечное линейно упорядоченное множество.

Малая категория называется идемпотентно свободной, если в ней нет морфизмов α, не равных тождественным и удовлетворяющих равенству $\alpha^2 = \alpha$. Поскольку из $\alpha \circ \beta = 1$ следует $\beta \circ \alpha \circ \beta \circ \alpha = \beta \circ \alpha$, то каждый являющийся ретракцией (или коретракцией) морфизм в идемпотентно свободной категории будет изоморфизмом. Для произвольной малой категории $\mathbf{C}$ обозначим через $Iso(\mathbf{C})$ ее подкатегорию, состоящую из всех обратимых морфизмов.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathbf{C}$ *- идемпотентно свободная малая категория. Тогда* $\operatorname{Dim} Iso(\mathbf{C}) \leq \operatorname{Dim} \mathbf{C}$.

Доказательство. Полная подкатегория $\mathbf{A}$ категории $\mathbf{B}$ называется инициальной [12], если она содержит область любого морфизма, кообласть которого принадлежит $Ob\mathbf{A}$. Согласно [12, лемма 1] в этом случае $\mathrm{c.d.}\mathbf{A} \leq \mathrm{c.d.}\mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{C}$ - идемпотентно свободная категория. Тогда подкатегория $Iso(\mathbf{C})' \subseteq \mathbf{C}'$ категории факторизаций будет инициальной в $\mathbf{C}'$. Следовательно, $\mathrm{c.d.}Iso(\mathbf{C})' \leq \mathrm{c.d.}\mathbf{C}'$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathbf{C}$ - малая категория с сокращениями, тогда она идемпотентно свободна, причем $\dim \mathbf{C} = \operatorname{Dim} \mathbf{C}$ [5]. В этом случае, если $\mathbf{C}$ удовлетворяет неравенству $\dim \mathbf{C} \leq 1$, то по лемме 1.4 $\dim Iso(\mathbf{C}) \leq 1$, и значит $Iso(\mathbf{C})$ будет свободным группоидом согласно результату Столлингса и Суона [13, следствие, с.585] . Но, в соответствии с [14, следствие 2^*, с.941] из выполнения неравенства $\dim \mathbf{C} \leq 1$ для не имеющей кручения категории $\mathbf{C}$ с сокращениями следует, что $\mathbf{C}$ частично свободна. Мы установили, что в случае $\dim \mathbf{C} \leq 1$ категория $\mathbf{C}$ не имеет кручения. Значит, если $\mathbf{C}$ - категория с сокращениями, такая, что $\dim \mathbf{C} \leq 1$, то $\mathbf{C}$ частично свободна. К сожалению, полное доказательство результата [14, следствие 2^*] проведено лишь для случая, когда $\mathbf{C}$ - моноид. По этой причине и в целях замкнутости изложения, мы избираем другой путь для доказательства того, что малые категории с сокращениями размерности 1 частично свободны.

§2. Категории с сокращениями размерности 1

Докажем основные результаты.

Пусть $\mathbf{C}$ - малая категория и α - ее морфизм. Обозначим через $\mathbf{C}'_\alpha$ полную подкатегорию категории $\mathbf{C}'$, состоящую из таких $\beta \in \mathbf{C}'$, что $\mathbf{C}'(\beta, \alpha) \neq \emptyset$. Согласно [12, следствие 7] $\mathrm{c.d.}\mathbf{C}' = \sup\{\mathrm{c.d.}\mathbf{C}'_\alpha : \alpha \in Ob\mathbf{C}'\}$. Морфизмы, которые не являются изоморфизмами , называются необратимыми. Морфизм α называется разложимым, если он может быть представлен в виде композиции $\alpha = y \circ x$ необратимых морфизмов категории $\mathbf{C}$; в противном случае он называется неразложимым. Легко видеть, что морфизм $\alpha \in Mor\mathbf{C}$ неразложим тогда и только тогда, когда категория $\mathbf{C}(\alpha)$ содержит не более двух изоморфных объектов. Неразложимые необратимые морфизмы называются атомами.

Пусть $End(\alpha)$ - полная подкатегория из $\mathbf{C}'$, множество объектов которой состоит из единственного объекта α.

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathbf{C}$ *- малая категория с сокращениями и* α *- ее атом. Тогда*

$$\mathrm{c.d.}\mathbf{C}'_\alpha \geq 1 + \mathrm{c.d.}End(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $N\mathbf{C}'_\alpha$ - полная подкатегория из $\mathbf{C}'_\alpha$, состоящая из объектов $\beta \in \mathbf{C}'_\alpha$, которые являются необратимыми морфизмами из $\mathbf{C}$. Рассмотрим произвольный $\beta \in ObN\mathbf{C}'_\alpha$. Существуют морфизмы x, y из $\mathbf{C}$ такие, что $y \circ \beta \circ x = \alpha$. Поскольку α - неразложимый, один из морфизмов среди $y \circ \beta$ и x будет изоморфизмом. Если $y \circ \beta$ - изоморфизм, то морфизмы y и β - обратимые, ибо $\mathbf{C}$ - категория с сокращениями. Но β по предположению необратим, значит x - изоморфизм. Аналогично доказывается, что y - изоморфизм. Следовательно, каждый объект $\beta \in ObN\mathbf{C}'_\alpha$ изоморфен α. Отсюда вытекает, что категория $N\mathbf{C}'_\alpha$ эквивалентна категории $End(\alpha)$, и имеет место равенство c.d.$N\mathbf{C}'_\alpha$ = c.d.$End(\alpha)$. Таким образом, достаточно доказать неравенство c.d.$\mathbf{C}'_\alpha \geq 1+$c.d.$N\mathbf{C}'_\alpha$. С этой целью рассмотрим категорию Θ, состоящую из двух объектов 0 и 1, и двух морфизмов $l, r : 0 \to 1$, кроме тождественных. Построим функтор $\Lambda : \mathbf{C}'_\alpha \to \Theta$ следующим образом.

На объектах $\beta \in N\mathbf{C}'_\alpha$ положим $\Lambda(\beta) = 1$. Если $\beta \in Ob\mathbf{C}'_\alpha$ - обратимый морфизм из $\mathbf{C}$, то положим $\Lambda(\beta) = 0$. На морфизмах категории $N\mathbf{C}'_\alpha$ (которые , ясно, все будут изоморфизмами) значения функтора Λ положим равными тождественному морфизму объекта 1. Пусть $I\mathbf{C}'_\alpha$ - полная подкатегория категории $\mathbf{C}'_\alpha$, состоящая из объектов, являющихся обратимыми морфизмами категории $\mathbf{C}$. На морфизмах категории $I\mathbf{C}'_\alpha$ положим значения функтора Λ равными тождественному морфизму объекта $0 \in \Theta$. Для любых $\beta \in ObI\mathbf{C}'_\alpha$ и $\gamma \in ObN\mathbf{C}'_\alpha$ множество $\mathbf{C}'_\alpha(\gamma, \beta)$ пусто, ибо в противном случае для некоторых $y, x \in Mor\mathbf{C}$ имеет место равенство $\beta = y \circ \gamma \circ x$, влекущее обратимость морфизмов x, y и, значит, обратимость морфизма γ. С другой стороны, для таких β и γ множество $\mathbf{C}'_\alpha(\beta, \gamma)$ состоит из пар (x, y), для которых $y \circ \beta \circ x = \gamma$. Так как β - изоморфизм, а γ необратим, то либо y необратим, либо x необратим. Поскольку α - неразложимый, а всякий объект γ из $ObN\mathbf{C}'_\alpha$ изоморфен ему в $\mathbf{C}'$, то равенство $y \circ \beta \circ x = \gamma$ не может быть выполнено в случае, когда морфизмы y и x оба необратимы. Положим

$$\Lambda((x, y) : \beta \to \gamma) = \begin{cases} l, & \text{если } x \text{ необратим,} \\ r, & \text{если } y \text{ необратим,} \end{cases}$$

при $\beta \in ObI\mathbf{C}'_\alpha$ и $\gamma \in ObN\mathbf{C}'_\alpha$. Легко видеть, что построенное отображение $\Lambda : Mor\mathbf{C}'_\alpha \to Mor\Theta$ будет переводить композицию морфизмов в композицию и тождественные морфизмы - в тождественные. Тем самым определен функтор $\Lambda : \mathbf{C}'_\alpha \to \Theta$.

Заметим, что для любого функтора $G : \Theta \to Ab$ значения $\lim^n G$ при $n > 1$ равны нулю, а группа $\lim^1 G$ изоморфна коуравнителю пары гомоморфизмов $(G(l), G(r))$. В частности, если $G(0) = 0$, то $\lim^1 G \cong G(1)$.

Пусть $F : N\mathbf{C}'_\alpha \to Ab$ - функтор и n - натуральное число, такие, что $\lim^n F \neq 0$. Обозначим через $F_0 : \mathbf{C}'_\alpha \to Ab$ функтор, ограничение которого на $I\mathbf{C}'_\alpha$ равно нулю , а на $N\mathbf{C}'_\alpha$ - функтору F. Спектральная последовательность Андре (см. например [8]) $\lim^p_\Theta \mathrm{Ran}^q_\Lambda F_0 \Rightarrow \lim^{p+q} F_0$, в силу c.d.$\Theta = 1$, вырождается в точные последовательности

$$0 \to \lim^1_\Theta \mathrm{Ran}^k_\Lambda F_0 \to \lim^{k+1} F_0 \to \lim_\Theta \mathrm{Ran}^{k+1}_\Lambda F_0 \to 0$$

При этом $\mathrm{Ran}^k F_0(0) = \lim^k_{0/\Lambda} F_0 \circ Q_0$, $\mathrm{Ran}^k F_0(1) = \lim^k_{1/\Lambda} F_0 \circ Q_1$, где $Q_0 : 0/\Lambda \to \mathbf{C}'_\alpha$ и $Q_1 : 1/\Lambda \to \mathbf{C}'_\alpha$ - забывающие функторы кослоев. Объекты категории $1/\Lambda$ суть пары $(\beta \in \mathbf{C}'_\alpha, 1 \to \Lambda(\beta))$, в которых морфизмы $1 \to \Lambda(\beta)$ равны тождественному. Отсюда легко видеть, что категория $1/\Lambda$ будет изоморфна категории $N\mathbf{C}'_\alpha$, причем функтор Q_1 можно рассматривать как полное вложение категории $N\mathbf{C}'_\alpha$ в $\mathbf{C}'_\alpha$. Следовательно, $\lim^n_{1/\Lambda} F_0 \circ Q_1 \cong \lim^n F_0|_{N\mathbf{C}'_\alpha} = \lim^n F \neq 0$.

Докажем теперь, что существует строго коинициальное вложение $I\mathbf{C}'_\alpha \subseteq 0/\Lambda$. Категория $0/\Lambda$ состоит из объектов следующих трех типов:

1) $(\sigma, 1_0 : 0 \to \Lambda(\sigma)),\ \sigma \in \mathbf{C}'_\alpha$ - обратимый морфизм из $\mathbf{C}$;

2) $(\beta, l : 0 \to \Lambda(\beta)),\ \beta \in \mathbf{C}'_\alpha$ - необратимый морфизм из $\mathbf{C}$;

3) $(\beta, r : 0 \to \Lambda(\beta)),\ \beta \in \mathbf{C}'_\alpha$ - необратимый морфизм из $\mathbf{C}$.

Так как ни для какого морфизма $x \in Mor\Theta$ не выполнено равенство $x \circ l = r$, то морфизмов между объектами второго и третьего типа нет. Пусть Λ_0 - полная подкатегория из $0/\Lambda$, состоящая из объектов первого типа. Легко видеть, что вложение $\Lambda_0 \subseteq 0/\Lambda$ стого коинициально. Поскольку значения F_0 на $I\mathbf{C}'_\alpha$ равны нулю, то ограничение функтора $F_0 \circ Q_0$ на подкатегорию Λ_0 равно нулю. Стало быть, $\lim^k_{0/\Lambda} F_0 \circ Q_0 \cong \lim^k F_0 \circ Q_0|_{\Lambda_0} = 0$, для всех $k \in \mathbf{N}$. Таким образом, функтор $\mathrm{Ran}^n_\Lambda F_0 : \Theta \to Ab$ принимает значения, равные $\mathrm{Ran}^n_\Lambda F_0(0) = 0$ и $\mathrm{Ran}^n_\Lambda F_0(1) \cong \lim^n F \neq 0$. Так как существует мономорфизм

$$\lim^1_\Theta \mathrm{Ran}^n_\Lambda F_0 \to \lim^{n+1} F_0,$$

заключаем, что в случае c.d.$N\mathbf{C}'_\alpha \geq n$ будет c.d.$\mathbf{C}'_\alpha \geq n+1$. Следовательно, c.d.$\mathbf{C}'_\alpha \geq 1 +$ c.d.$N\mathbf{C}'_\alpha = 1 +$ c.d.$End(\alpha)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.2 *Пусть* $\mathbf{C}$ *- малая категория с сокращениями, размерности* $\dim \mathbf{C} \leq 1$. *Тогда она частично свободна.*

Доказательство. Так как $\mathbf{C}$ - категория с сокращениями, то $\mathrm{Dim}\,\mathbf{C} = \dim \mathbf{C}$ и, для каждого ее морфизма α, категория $\mathbf{C}(\alpha)$ является предупорядоченным множеством. Поскольку $\mathrm{Dim}\,\mathbf{C}(\alpha) \leq \mathrm{Dim}\,\mathbf{C} \leq 1$ по лемме 1.2, то скелет категории $\mathbf{C}(\alpha)$ будет изоморфен конечному линейно упорядоченному множеству, согласно лемме 1.3. Число элементов этого линейно упорядоченного множества , уменьшенное на единицу, будет называться высотой морфизма α и обозначаться $h(\alpha)$. Ясно, что $h(\alpha)+1$ равно максимальному числу попарно неизоморфных объектов категории $\mathbf{C}(\alpha)$. Категория $\mathbf{C}(\alpha)$ содержит инициальный $(1,\alpha)$ и терминальный $(\alpha,1)$ объекты. При этом объекты $(1,\alpha)$ и $(\alpha,1)$ изоморфны в $\mathbf{C}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда α - изоморфизм. Отсюда α - изоморфизм, если и только если $h(\alpha)=0$.

Если $h(\alpha)=1$, то всякий объект (f,g) из $\mathbf{C}(\alpha)$ изоморфен либо $(1,\alpha)$, либо $(\alpha,1)$. В этом случае либо существует изоморфизм $\sigma \in Mor\mathbf{C}$ такой, что $\sigma = f$ и $g = \alpha\circ\sigma^{-1}$, либо существует изоморфизм σ, для которого $g=\sigma$ и $f = \sigma^{-1}\circ\alpha$. Значит, из условия $h(\alpha)=1$ следует, что α - атом. С другой стороны, если α - атом, то из равенства $g \circ f = \alpha$ следует обратимость одного из морфизмов g, f ; в этом случае в $\mathbf{C}(\alpha)$ каждый объект изоморфен либо $(1,\alpha)$, либо $(\alpha,1)$, и значит, $h(\alpha)=1$. Следовательно, $h(\alpha)=1$ тогда и только тогда, когда α - атом.

Пусть $h(\alpha) = n \geq 1$. Тогда предупорядоченное множество $\mathbf{C}(\alpha)$ содержит $n+1$ попарно неизоморфных в $\mathbf{C}(\alpha)$ объектов $(1,\alpha) = (f_0,g_0)$, (f_1,g_1) , … , $(f_n,g_n) = (\alpha,1)$, связанных некоторыми необратимыми морфизмами

$$(f_0,g_0) \to (f_1,g_1) \to \dots \to (f_n,g_n).$$

Морфизмы категории $\mathbf{C}$, задающие при $0 \leq i \leq n-1$ морфизмы $(f_i,g_i) \to (f_{i+1},g_{i+1})$ категории $\mathbf{C}(\alpha)$ обозначим через β_{i+1}. Ясно, что $\alpha = \beta_n \circ \dots \circ \beta_1$, причем морфизмы $\beta_1,\dots,\beta_n$ - атомы, ибо в случае разложимости одного из них появился бы еще один объект в $\mathbf{C}(\alpha)$ не изоморфный никакому из (f_i,g_i) , $0 \leq i \leq n$.

Пусть α - атом. По лемме 2.1 c.d.$End(\alpha) \leq 0$. Поскольку в моноиде $End(\alpha)$ все элементы обратимы, то он будет группой когомологической размерности 0. Пользуясь, например, критерием О.А.Лаудала [15], заключаем, что $End(\alpha)$ - тривиальная группа, состоящая из единственного элемента $(1,1)$. Значит, выполнение равенства $\sigma\circ\alpha\circ\tau = \alpha$ для некоторых атома α и обратимых морфизмов σ,τ из $\mathbf{C}$ будет возможно лишь в случае, когда σ и τ - тождественные морфизмы.

Отсюда делаем вывод, что $\mathbf{C}$ удовлетворяет следующим четырем аксиомам Р.Уонга [16]:

1) $\mathbf{C}$ - категория с сокращениями ;

2) каждый ее морфизм разлагается в композицию атомов ;

3) если $\alpha\circ\beta = \alpha'\circ\beta'$, где α и α' - атомы, то для некоторого изоморфизма σ выполнено $\alpha' = \alpha\circ\sigma$;

4) если $\alpha\circ\tau = \sigma\circ\alpha$ для некоторых изоморфизмов σ и τ , а α - атом, то σ и τ - тождественные морфизмы .

Построим ориентированный граф, состоящий из атомов. С этой целью на множестве всех атомов определим отношение эквивалентности, полагая $\alpha \sim \beta$ в тех случаях, когда существуют изоморфизмы σ и τ такие, что $\sigma\circ\alpha\circ\tau = \beta$. Выбирая из каждого класса эквивалентности представителя, получим некоторое множество Γ атомов, которое и будет множеством ребер нашего графа.

Согласно Р.Уонгу [16, лемма 4.2] , при выполнении аксиом 1)-4) каждый морфизм $\alpha \in Mor\mathbf{C}$ допускает единственное разложение $\alpha = \sigma_0 \circ \gamma_1 \circ \ldots \circ \sigma_{n-1} \circ \gamma_n \circ \sigma_n$ такое, что $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ - обратимые морфизмы и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$. По лемме 1.4 подкатегория $Iso(\mathbf{C})$ категории $\mathbf{C}$ имеет размерность не больше 1, стало быть, является свободным группоидом. Поэтому существует некоторое состоящее из изоморфизмов подмножество $\Sigma \subseteq Mor\mathbf{C}$ такое, что каждый изоморфизм σ категории $\mathbf{C}$ допускает единственное представление $\sigma = \sigma_1^{\epsilon_1} \circ \sigma_2^{\epsilon_2} \circ \ldots \circ \sigma_m^{\epsilon_m}$, для некоторых $\epsilon_i = \pm 1, \sigma_i \in \Sigma, 1 \le i \le m$, не содержащее подслов вида $\sigma_i^{-1}\sigma_i$ и $\sigma_i\sigma_i^{-1}$.

Полагая $M = \Gamma \cup \Sigma$ и пользуясь тем, что каждый не равный тождественному морфизм $\alpha \in Mor\mathbf{C}$ допускает единственное представление $\alpha = \mu_1^{\epsilon_1} \circ \mu_2^{\epsilon_2} \circ \ldots \circ \mu_n^{\epsilon_n}$ такое, что $\epsilon_i = \pm 1$ при $\mu_i \in \Sigma$ и $\epsilon_i = 1$ при $\mu_i \in \Gamma$, не содержащее подслов $\mu^{-1}\mu$ и $\mu\mu^{-1}$ для $\mu \in \Sigma$, приходим к заключению, что категория $\mathbf{C}$ изоморфна категории частных категории путей графа $\Gamma \cup \Sigma$, полученной обращением морфизмов из Σ. Теорема доказана.

Пусть π - произвольный моноид. Известно [3], что размерность Хохшильда моноидного кольца $\mathbf{Z}(\pi)$ равна размерности Хохшильда-Митчела моноида π , рассматриваемого как категория с единственным объектом.

Следствие 2.3. *Пусть π - моноид с сокращениями. Тогда размерность Хохшильда моноидного кольца $\mathbf{Z}(\pi)$ не больше единицы в том и только том случае, когда моноид π частично свободен.*

В терминах сингулярных расширений [17, гл.X, § 3] , моноид с сокращениями, для которого каждое сингулярное расширение с помощью $\mathbf{Z}$-алгебры $\mathbf{Z}(\pi)$ является рассеченным, будет обязательно частично свободным.

Литература

[1] Mitchell B. On the dimension of object and categories I. Monoids.// J.Algebra. 1968. V.9, N 3. P. 314 - 340 .

[2] Novikov B.V. On partial cohomologies of semigroups // Semigroup Forum. 1984. V.28, N 1-3. P. 355 - 364 .

[3] Mitchell B. Rings with several objects // Adv.Math. 1972. V.8. P.1-161.

[4] Cheng C.C. Deltas of Hochschild dimension one // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V.67, N 2. P.221 - 223.

[5] Хусаинов А.А. О размерности Хохшильда-Митчела малых категорий // Второй сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике. Тезисы докладов, ч.2. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1996. С.196-197.

[6] Cheng C.C., Wu Y.-C., Mitchell B. Categories of fractions preserve dimension one // Commun. Algebra. 1980. V.8. P. 927 - 939.

[7] Mitchell B. Some applications of module theory to functor categories // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V. 84. P. 867 - 885.

[8] Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий. М.: Мир, 1971.

[9] Хусаинов А.А. Когомологии малых категорий с коэффициентами в абелевой категории с точными произведениями // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30 , N 4. С. 210 - 215 .

[10] Oberst U. Homology of categories and exactness of direct limits // Math. Z. 1968. Bd. 107. S. 89 - 115.

[11] Baues H.-J., Wirsching G. Cohomology of small categories // J. Pure Appl. Algebra. 1985. V.38. P.187 - 211 .

[12] Mitchell B. A remark on projectives in functor categories // J. Algebra. 1981. V. 69, N 1 . P. 24 - 31 .

[13] Swan R.G. Groups of cohomological dimension one // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 585 - 601 .

[14] Cheng C.C., Wong R.W. Hereditary monoid rings // Amer. J. Math. 1982. V. 104 , N 5. P. 935 - 942 .

[15] Laudal O.A. Note on the projective limit on small categories // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V.33 , N 2. P. 307 - 309 .

[16] Wong R.W. Free ideal monoid rings // J. Algebra . 1978. V.53. P. 21 - 35 .

[17] Маклейн С. Гомология. М. : Мир, 1966 .